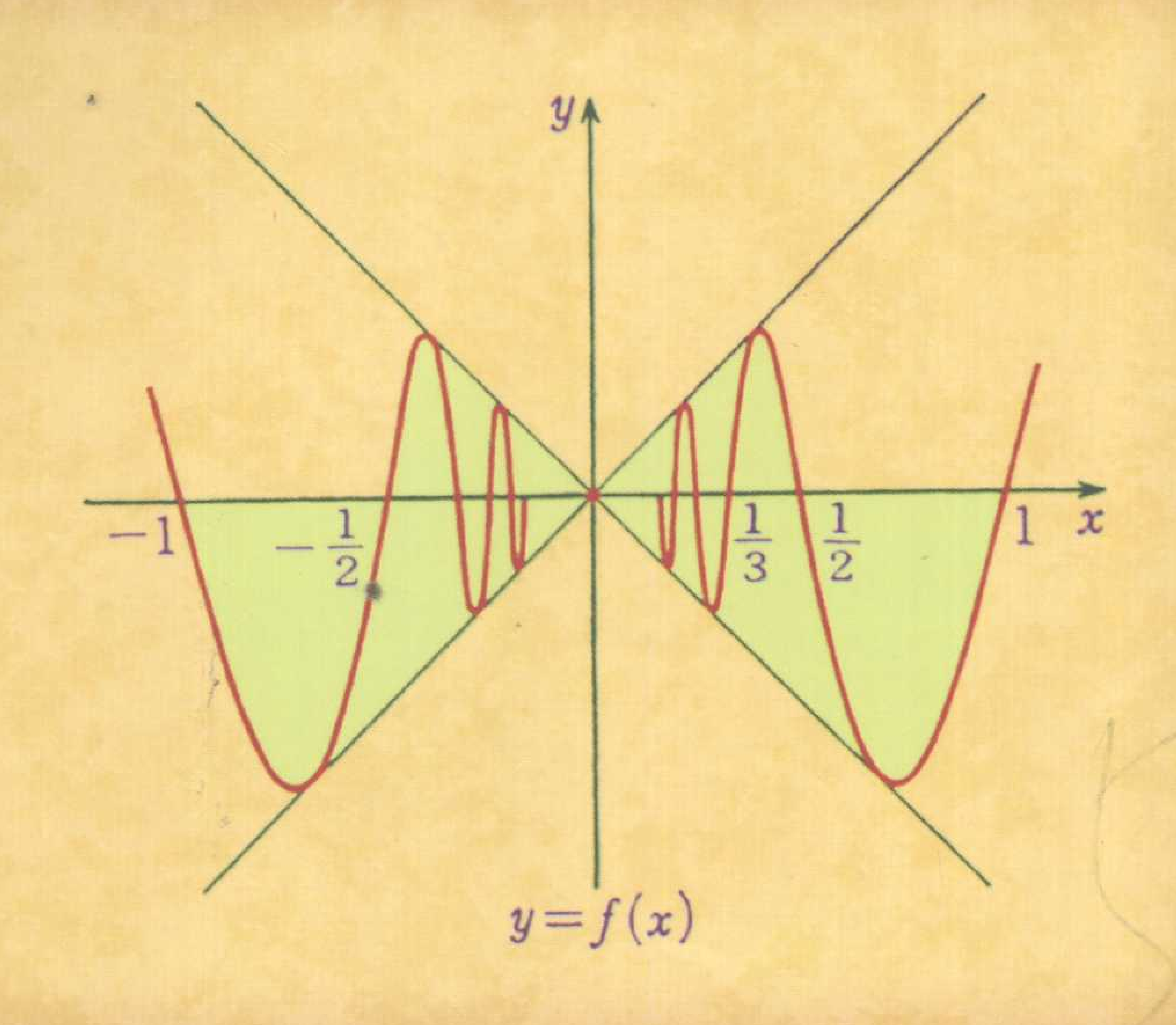
TURING 图灵数学·统计学丛书 20





An Introduction to Calculus

微积分入门 I

一元微积分

[日] 小平邦彦 著

裴东河 译



微积分入门 I 一元微积分

An Introduction to Calculus

本书以严格的实数理论为基础，有别于通常的分析教科书。各部分内容简洁而流畅，书中利用旋转的概念构造了三角函数的理论，也颇具新意。作为一部经典著作，它处处体现了作者卓越的才识和对微积分的深刻体会与独到见解。叙述中兼顾了严密性和直观性，表述非常精练，而内容却又十分丰富。

本书是小平邦彦晚年为后人留下的一份重要的文化财富，不仅值得数学专业的人士研读，而且对于需要微积分知识的其他理工科学生和专业人员，也是非常优秀的教材和重要的参考书。



小平邦彦（Kunihiko Kodaira） 20世纪日本最伟大的数学家之一，他是迄今为止为数不多的既获得菲尔兹奖（1954年）、又获得沃尔夫奖（1985年）的数学家。1957年被日本政府授予文化勋章。他是日本学士院院士、美国科学院和德国哥廷根科学院外籍院士。先后在美国普林斯顿高等研究中心、哈佛大学、约翰·霍普金斯大学、斯坦福大学、日本东京大学等任教授。他在调和积分理论、代数几何学和复解析几何学等诸多领域做出了卓越的贡献，著作有《微积分入门》（卷I和卷II）、《复分析》、《复流形理论》等。

本书相关信息请访问：
图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 88593802
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

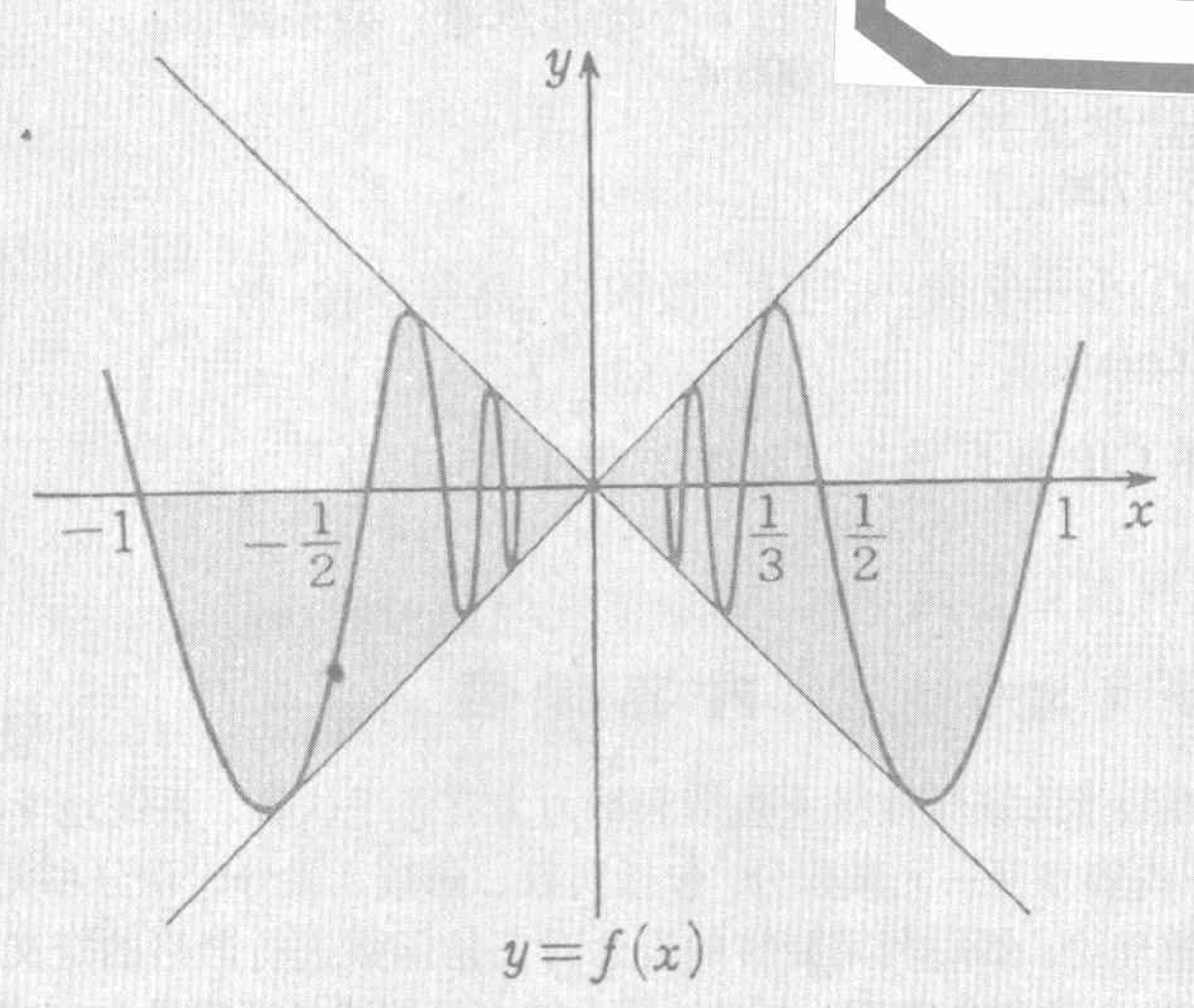
分类建议 数学/基础数学

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn



ISBN 978-7-115-17261-7/O1
定价：39.00 元

图灵数学·统计学丛书 20





An Introduction to Calculus

微积分入门 I

一元微积分

[日] 小平邦彦 著
裴东河 译

人民邮电出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

微积分入门Ⅰ：一元微积分 /（日）小平邦彦著；裴东河译．—北京：人民邮电出版社，2008.4
（图灵数学·统计学丛书）
ISBN 978-7-115-17261-7

Ⅰ．微…　Ⅱ．①小…②裴…　Ⅲ．微积分-高等学校-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 183541 号

内容提要

本书是一位世界数学大家倾注极大热情和精力为有志于认真、系统地学习微积分的学生撰写的一本优秀教材．内容涉及一元微积分，包括实数、函数、微分、积分和无穷级数．首先详细而严密地论述了实数理论，然后利用旋转的概念对三角函数进行严格的定义，最后介绍了一致有界函数列的 Arzelà 逐项积分定理．本书的最大特点是叙述的严密性和直观性，可作为大学本科微积分的教材或参考书．

图灵数学·统计学丛书

微积分入门Ⅰ：一元微积分

◆ 著　[日] 小平邦彦
　译　裴东河
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：14.5
　字数：292 千字　2008 年 4 月第 1 版
　印数：1－4 000 册　2008 年 4 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-7561 号

ISBN 978-7-115-17261-7/O1

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

版权声明

KEISOBAN, KAISEKINYUMON

by Kunihiko Kodaira

First edition published 1991. Second edition 2003

Originally published in Japanese by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 2003

This Chinese (simplified character) language edition published in 2008 by Posts and Telecom Press, Beijing by arrangement with the author c/o Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo

译 者 序

本书是根据日本岩波书店 2003 年出版的《解析入门 I》翻译的. 本书的作者小平邦彦先生是为数不多的同时获得菲尔兹奖和沃尔夫奖的著名数学家之一. 他在调和积分理论、代数几何学和复解析几何学等诸多领域都做出了卓越的贡献. 小平邦彦先生还是一位杰出的数学教育家, 培养了大量的优秀数学工作者.《解析入门 I》和《解析入门 II》就是在他晚年为后人留下的又一重要文化财富. 这是一套表述非常精练而内容十分丰富的微积分教材 (原著分 I 卷和 II 卷, 包括附录、习题解答及提示、索引, 仅有 514 页). 由于它以严格的实数理论为基础, 因此与通常的微积分教材不同, 各部分内容简洁而流畅, 充分体现了作者的数学才识. 另外本书利用旋转的概念构造了三角函数的理论也是非常有趣的. 它不仅值得数学专业的学生研读, 而且对于需要微积分知识的理工科学生来说, 也是值得一读的好教材或参考书.

本书能得以顺利出版, 首先要感谢人民邮电出版社图灵公司及明永玲、武卫东编辑的大力支持, 同时, 东北师范大学的黄松爱老师和研究生刘娜、孔令令、刘美含、刘赢、高瑞梅同学在翻译和校订中给予了大力帮助, 在此一并表示衷心感谢!

在翻译本书的过程中, 译者虽然尽最大努力尊重原文原意, 并尽可能避免直译产生的歧义, 但是由于才疏学浅, 难免存在翻译不当之处, 敬请广大读者批评指正, 以便再版时更正.

裴东河

2007 年 5 月

裴东河 日本北海道大学理学博士, 现为东北师范大学数学与统计学院教授, 博士生导师, 教育部“新世纪优秀人才支持计划资助项目”获得者. 主要研究方向是微分几何与微分拓扑等方面.

前　言

这本微积分入门是以刚刚结束高中数学学习, 步入大学后正式学习数学分析的人为对象而编写的. 希望本书能够成为从高中数学通向现代微积分学的桥梁.

分析学的基础是实数论, 本书首先详细而严密地论述了实数论. 最初, 我计划以高木先生的《解析概論》第 3 次修订版 (岩波书店) 和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》(内田老鶴圃) 等作为蓝本, 希望用读者容易接受的方式严谨地讲解传统的微积分学, 但是结果却在某些地方脱离了这一宗旨. 首先, 在第 2 章三角函数的导入上, 本书从角度可以表示为平面的旋转的量的观点出发, 用指数函数 $e^{i\theta}$ 作为媒介定义了三角函数. 因为在进入微分学之前, 对三角函数进行严格的定义是非常必要的.

关于第 4 章的单变量函数的积分, 受高木先生著作[①] 的启示, 被积函数只限定在有至多有限个不连续点的情况, 而闭区间上具有不连续点的函数的积分都作为广义积分来处理. 在第 5 章中, 介绍了一致有界函数列的 Arzelà 逐项积分定理及由 Hausdorff 给出的初等证明. 这个定理自 Lebesgue 逐项积分定理的出现而被遗忘, 但在应用上非常有用. 在第 6 章[②]中, 使用积分记号, 从 Arzelà 定理导出微积分定理.

在第 7 章中, 将详细介绍多重积分, 即多元函数的积分, 二元函数一般的情况则在第 8 章处理. 由于在一元函数的情况, 被积函数限定为至多具有有限个不连续点, 因此多元函数的情况也应进行简化. 为此, 第 7 章首先在矩形上定义连续函数的积分概念, 然后用 (平面上的) 任意邻域上的连续函数的积分定义广义积分. 从广义积分限定在被积函数是连续函数这一点来说, 它比传统的黎曼积分要狭窄, 但从它适用于任意邻域这一点来说, 又比黎曼积分宽广. 在第 8 章中同样定义了一般情况下的多重积分. 在多重积分中, 我们把重点放在了积分变量的变换公式的严格证明上. 一元函数的积分变量变换公式是直接从不定积分的讨论中导出的. 对有二元函数 $f(x,y)$, 满足 $F_{xy}(x,y)=f(x,y)$ 的函数 $F(x,y)$ 可以作为 $f(x,y)$ 的不定积分[③]. 7.3 节中双重积分的变量变换公式就是根据这种意义下的不定积分的考察获得的. 其出发点是无论如何也要设法把一元函数的积分变换公式的简洁证明, 推广到两变量的情况. 在第 8 章中, 通过对变量的个数采用归纳法, 证明了一般情况的多重积分的变量变换公式.

作为微积分的应用, 传统的方法是讲授曲线的长度和曲面的面积, 另外还讲授

① 高木貞治《解析概論》, 改訂第 3 版, 岩波書店. pp.109-110. (中文版将由人民邮电出版社出版. —— 编者注)

② 第 6~9 章的内容见本书姊妹篇《微积分入门 II》. —— 编者注

③ 亀谷俊司《解析学入門》, 朝倉書店, p.303.

微分形式理论的初步知识. 但第 8 章已经超过了预定的篇幅, 只好忍痛割爱删除了微分形式理论部分, 在第 9 章中导出曲线长度公式和曲面面积公式后收尾.

现代数学受形式主义的影响很深, 强调数学是公理化构成的论证体系. 但我以为, 正如物理学是描述物理现象一样, 数学是描述客观存在的数学现象. 因此为了理解数学, 明确把握数学现象的直观是非常重要的. 我在撰写本书的过程中, 不仅在论证的严密性上, 而且在直观描述上都下了巨大的功夫.

向在本书的习题解答和提示的写作过程中付出辛勤劳动的前田博信氏表示衷心的感谢.

撰写本书过程中参考了高木先生的《解析概論》和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》. 我想书中《解析概論》的影响应随处可见. 所有的术语都是以《岩波数学辞典第 3 版》为标准.

本书出版过程中得到了岩波书店编辑部荒井秀男先生的许多帮助, 借此机会向荒井先生表示衷心的感谢.

作 者

1990 年 12 月

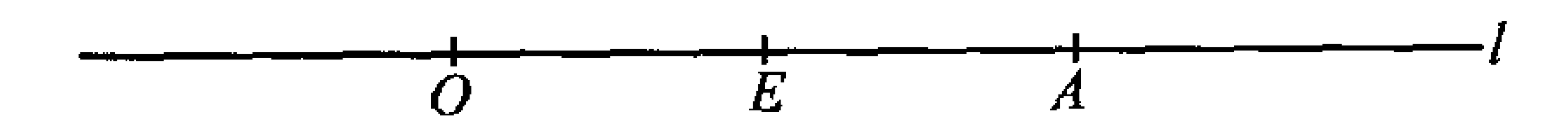
目 录

第1章　实　数

1.1　序

学过高中数学的人, 应该大致知道实数是什么. 可是从现代数学的观点来看, 高中数学的实数理论在严密性上有欠缺, 它作为分析学的基础还不很充分. 本章的目的是在把有理数作为已知的基础, 然后从理论上严密地阐述实数理论. 首先复习高中已经学过的有关实数的知识, 同时指出其严密性上的欠缺之处.

在一条直线 l 上取两个不同的点 O 和 E, 对 l 上任意一点 A, 用 OA 来表示以线段 OE 的长度为单位长度测量的, A 和 O 的距离.

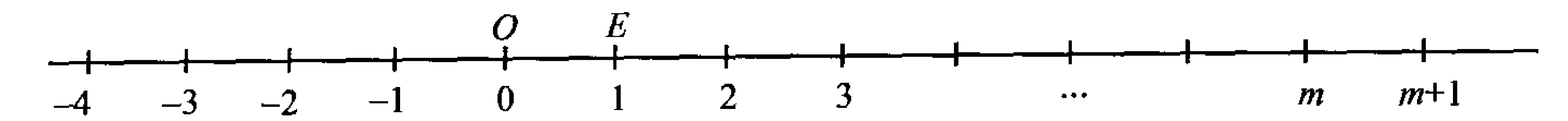


OA除O和A重合的情况之外都是正实数. 进一步

从 O 点观察,如果 A 与 E 在 O 同侧,则令 $\alpha = OA$,
从 O 点观察,如果 A 与 E 分别在 O 两侧, 则令 $\alpha = -OA$,
O 和 A 重合时,则令 $\alpha = 0$.

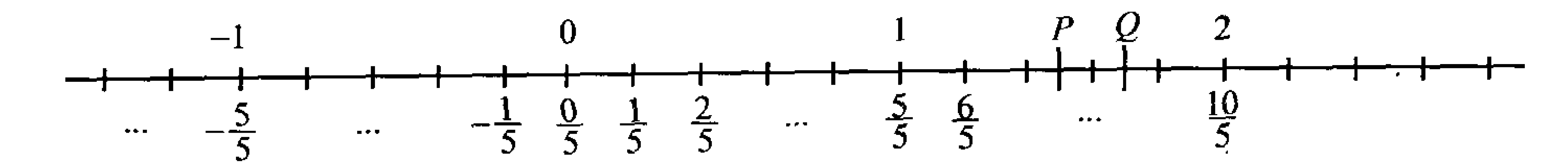
并且给直线 l 上每个点 A 分别对应一个实数 α, 则 l 上所有的点与全体实数之间是一一对应的. 此时把 l 叫做**数轴**, O 叫做原点, E 叫做单位点. 与 A 对应的实数 α 叫做 A 的**坐标**. 又 A 的坐标是 α 时, 记做 $A(\alpha)$, 并且把点 A 记做点 α, 或者简称为 α. 即实数与数轴上各点视为等同, 把实数看作是排列在数轴上的点.

整数是数轴上等距离排列的点:



相邻的两个整数 m 和 $m+1$ 的距离当然是 1.

自然数 n 确定时, 形如 m/n (m 是整数) 的有理数, 在数轴上以 $1/n$ 的距离排列. 例如下图表示有理数 $m/5$:



随着 n 的增大, 间隔 $1/n$ 能够无限变小. 因此无论在数轴上取多么短的线段 PQ, 只要 P 与 Q 不重合, P 与 Q 之间就存在无数多个有理数. 这表示, 有理数的集合在数轴上是处处稠密的.

$\sqrt{2}$ 不是有理数[①]. 不是有理数的实数叫做**无理数**. 因为 $\sqrt{2}$ 是无理数, 所以, 若 r 是有理数, 则 $r+\sqrt{2}$ 也是无理数. 显然 $r+\sqrt{2}$ 这样的无理数集合在数轴上也是处处稠密的. 因此, 全体无理数的集合在数轴上当然是处处稠密的.

如果用十进制的方法, 所有实数都可以用整数或小数的形式表示. 小数分为有限小数和无限小数. 有限小数意思从字面就可以理解. 例如: 0.0625=625/10 000=1/16.

无限小数中如 $1.121\,621\,621\,6\cdots$, 这样从某一位开始, 相同的几位数字无限循环排列的数叫做**循环小数**.

$$\begin{aligned}1.121\,621\,621\,6\cdots &= 1.1+0.0216+0.000\,021\,6+\cdots\\ &= 1.1+0.0216\times\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right)\end{aligned}$$

除去有限小数 1.1, 剩下的部分是以 0.0216 作为初项, 以 $1/10^3$ 作为公比的无穷等比级数. 因此,

$$\begin{aligned}1.121\,621\,621\,6\cdots &= 1.1+\frac{0.0216}{1-\frac{1}{10^3}}=1.1+\frac{21.6}{10^3-1}=\frac{11}{10}+\frac{216}{9990}\\ &= \frac{11\,205}{9990}=\frac{83}{74}.\end{aligned}$$

又例如循环小数

$$3.560\,975\,609\,756\,097\cdots$$

可以写成

$$\begin{aligned}3.560\,975\,609\,756\cdots &= 3+0.560\,97\times\left(1+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^{10}}+\cdots\right)\\ &= 3+0.560\,97\times\frac{1}{1-\frac{1}{10^5}}=3+\frac{56\,097}{99\,999}\\ &= 3+\frac{23}{41}=\frac{146}{41}.\end{aligned}$$

① 假定 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则它等于不可约分数 m/n (m, n 是自然数): $\sqrt{2}=m/n$. 所以 $2n^2=m^2$. 如果 m 是奇数, 则 m^2 也是奇数. 这与 $2n^2$ 是偶数相矛盾. 故 m 是偶数, 即 $m=2k$, k 是自然数, 所以 $n^2=2k^2$. 从而, n 是偶数. 这与 m/n 是不可约分数相矛盾. 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

一般地, 从某位开始的 n 个数字组成相同排列的无限循环小数, 是由有限小数和以有限小数作为初项并以 $1/10^n$ 作为公比的无穷等比级数的和组成的. 因为

$$1+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{3n}}+\cdots=\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}}=\frac{10^n}{10^n-1}$$

是有理数, 因此, 循环小数都是有理数.

反之,既不是整数也不是有理小数的有理数必能用循环小数表示. 这可以通过进行除法运算, 在把分数用小数来表示的操作过程中观察了解. 例如 89 除以 13, 可以得到右边的式子,

```
         6.846 153 84 ···
    13 ) 89
         78
①······ 110
         104
②······  60
          52
③······   80
          78
④······   20
          13
⑤······   70
          65
⑥······   50
          39
⑦······  110
         104
⑧······   60
          52
   ······ 80
            ·.
   ······    ·.
```

所以

$$\frac{89}{13}=6.846\ 153\ 846\ 153\ 846\ 153\cdots.$$

这个无限小数的第 7 位以后每 6 位就出现相同的排列 846 153, 是因为第 7 行的余数和第一行的余数都是 11 的缘故. 确定小数点后面数字 846 15··· 的除法运算的步骤如下：首先由 89 除以 13 得出余数 11, 这个余数 11 的 10 倍 110 除以 13 得出商是 8 余数是 6. 这个余数 6 的 10 倍 60 除以 13 得出商是 4 余数是 8. 这个余数 8 的 10 倍 80 除以 13 得出商是 6 余数是 2. 依此类推, 得出的商依次排列为 846 15···.

任意一个非整数、非有限小数的分数 $q/p(p,q$ 是自然数), 把它用无限小数来表示的除法运算的步骤完全类似. 即首先用 q 除以 p 得出商是 k, 余数是 r_1, 其次 $10r_1$ 除以 p 得出商是 k_1 余数是 r_2, 然后 $10r_2$ 处以 p 得出商是 k_2 余数是 r_3, $\cdots$, $10r_n$ 除以 p 得出商是 k_n 余数是 $r_{n+1},\cdots$, 以此类推得出的商 $k_1,k_2,\cdots,k_n,\cdots$ 分别是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的某一个数字, 分数 q/p 可用无限小数：

$$k.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots=k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\cdots$$

来表示. 当然, 在这里整数 k 也是用十进制数表示.

这种无限小数是循环小数, 可以通过以下方法确定：对某个 n, 当 $r_n=0$ 时, $k_n,k_{n+1},k_{n+2},\cdots$ 皆为 0,

$$\frac{q}{p}=k.k_1k_2\cdots k_{n-1}$$

成为有限小数, 与假设矛盾. 所以, 余数 r_n 全都是不大于 $p-1$ 的正整数. 因此, p 个余数 $r_1,r_2,\cdots,r_p$ 不可能全部不同. 换言之, 这 p 个余数中, 至少有两个是一样的：

$$r_m=r_n,\quad 1\leqslant m<n\leqslant p.$$

此时, 确定从小数点后第 n 位开始的数字 $k_n, k_{n+1}, k_{n+2}, \cdots$ 的除法运算与确定从第 m 位开始的数字 $k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots$ 的除法运算是一致的. 因此,

$$k_n = k_m, \quad k_{n+1} = k_{m+1}, \quad k_{n+2} = k_{m+2} \cdots.$$

也就是说, q/p 是从第 m 位开始, 数字 $k_m k_{m+1} \cdots k_{n-1}$ 的无限循环的循环小数.

无理数用无限不循环小数来表示. 例如

$$\sqrt{2} = 1.414\,213\,56 \cdots. \tag{1.1}$$

这个无限小数的表示是如下得到的. 首先, $\sqrt{2}$ 在 1 和 2 之间:

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

把 1 和 2 之间分成 10 等份, $\sqrt{2}$ 放入相邻的等分点 1.4 和 1.5 之间:

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5.$$

把 1.4 和 1.5 之间分成 10 等份, $\sqrt{2}$ 放入相邻的等分点 1.41 和 1.42 之间:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42.$$

把 1.41 和 1.42 之间分成 10 等份, $\sqrt{2}$ 放入相邻的等分点 1.414 和 1.415 之间:

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415.$$

反复进行这个操作, 就可以得出无限小数的表示 (1.1).

任意一个实数 α 用无限小数表示, 除 α 是整数或有限小数这种情况外, 其余完全可以用同样的方法来获得. 即, 首先确定满足

$$k < \alpha < k+1$$

的整数 k, 然后获得满足

$$k + \frac{k_1}{10} < \alpha < k + \frac{k_1+1}{10},$$

$$k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} < \alpha < k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2+1}{10^2},$$

$$k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \frac{k_3}{10^3} < \alpha < k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \frac{k_3+1}{10^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

的 $k_1, k_2, k_3, \cdots$ 顺次排列构成的无限小数表示:

$$\alpha = k.k_1 k_2 k_3 k_4 \cdots. \tag{1.2}$$

考虑到 α 还包含整数或有限小数的情况, 上面的一系列不等式也可以换成下面的一系列不等式:

$$k \leqslant \alpha < k+1, \quad k + \frac{k_1}{10} \leqslant \alpha < k + \frac{k_1+1}{10},$$

$$k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}\leqslant\alpha<k+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2+1}{10^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

当 α 是负数时, 式 (1.2) 中 k 是负整数. 此时, 令 $h_n=9-k_n$, 因为

$$0.k_1k_2k_3k_4\cdots+0.h_1h_2h_3h_4\cdots=0.9999\cdots=1,$$

所以

$$\alpha=k+1-0.h_1h_2h_3h_4\cdots.$$

因此, 若令 $h=-k-1$, h 是非负整数, 则

$$\alpha=-h.h_1h_2h_3h_4\cdots. \tag{1.3}$$

这是负实数 α 的一般十进制小数表示. 同理, 任意的实数都可以用十进制小数来表示.

反之, 任意的十进制小数是否也一定表示一个实数呢? 关于有限小数和循环小数, 由于我们已经阐述过, 把

$$k.k_1k_2k_3k_4k_5\cdots \tag{1.4}$$

设为如

$$1.010\ 110\ 111\ 011\ 110\ 111\ 110\ 1\cdots$$

这样的无限不循环小数. 在高中数学中, 实数 α

$$\alpha=k.k_1k_2k_3k_4k_5\cdots$$

的存在性作为当然的结果确认下来. 即 (1.4) 的小数去掉 $n+1$ 位以后的数字, 得到的有限小数设为

$$a_n=k.k_1k_2k_3\cdots k_n$$

的话, 就是承认了使不等式:

$$a_n<\alpha<a_n+\frac{1}{10^n},\quad n=1,2,3,4\cdots$$

完全成立的实数 α 的存在性. 放在数轴上考虑, 即意味着, 对于所有的 n=1, 2, 3, 4, $\cdots$ 的点, a_n 与 $a_n+1/10^n$ 之间存在点 α.

由于实数作为在以线段 OE 的长度为单位长度测量数轴上两点 O, A 间的距离时, 附加了±号来考虑, 因此为了证明实数 α 的存在, 必须证明数轴上存在这样的点 α. 为此, 必须明确数轴到底是什么. 至此, 我们看到高中数学中直线乃至实数还欠缺明确的定义.

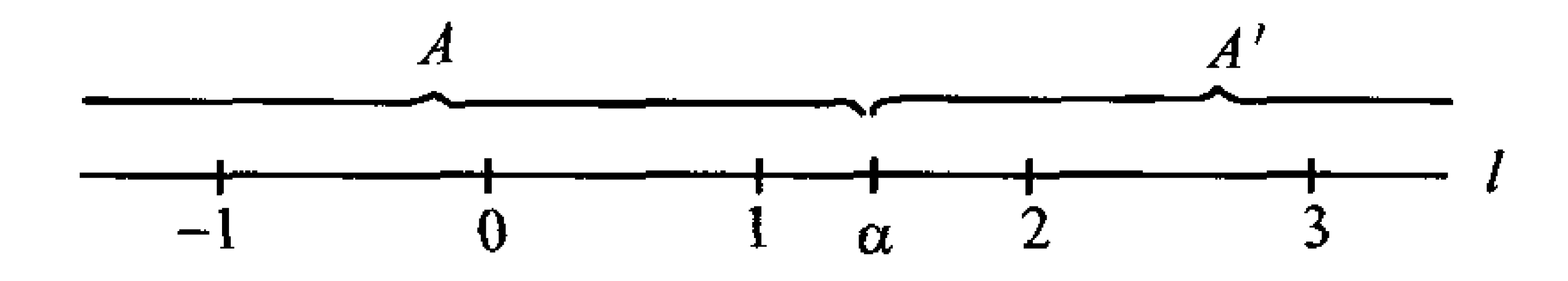
1.2 实 数

在本节, 我们假定读者已经掌握了有理数及其大小、加减乘除的知识, 在此基础上, 给出实数的严格定义. 要理解数学, 必须严密地追踪其论证过程, 仅仅如此还是不够的, 还必须对数学的现象有一个直观的理解."原来是这样, 原来如此, 我明白了!", 当你这样想的时候才能对它有一个综合的把握, 才能自由地驾驭理论. 以下在阐述实数的严密的理论时, 不时插入有助于帮助理解的说明, 也就是下面的小字印刷部分.

a) 实数的定义

有理数全体构成的集合用 $\mathbf{Q}$ 来表示. $\mathbf{Q}$ 的元素用 a, b, c, r, s 等字母表示. $\mathbf{Q}$ 关于加减乘除运算构成域 (field), 所以又把 $\mathbf{Q}$ 叫做**有理数域**. $\mathbf{Q}$ 的元素间定义了大小关系, 用 "$>$" 和 "$<$" 来表示, 这些我们在高中已经学过. 我们可以把有理数想象成按照大小顺序, 在直线上排成一行, 所以又把 $\mathbf{Q}$ 叫做**有理直线**. 对于两个不同的有理数 a, b, $a < b$ 时, 存在无数个有理数 r, 使 $a < r < b$ 成立, 这称之为有理数的**稠密性.**

再回到高中数学, 回顾一下数轴 l, 有理直线 $\mathbf{Q}$ 是 l 上的有理点, 即坐标是有理数的点的全体构成的集合. 现在如果给定一个有理数 α, $\mathbf{Q}$ 在下图中被 α 点分割成左侧的部分 A 和右侧的部分 A'.



A 是由比 α 小的有理数构成的集合, A' 是由比 α 大的有理数构成的集合, 记为:

$$A = \{r \in \mathbf{Q} | r < \alpha\}, \quad A' = \{r \in \mathbf{Q} | r > \alpha\} \quad \mathbf{Q} = A \cup A', \quad A \cap A' = \varnothing.$$

显然 A 中的有理数恒小于 A' 中的有理数.

$$r \in A, \quad s \in A', \quad 则\ r < s. \tag{1.5}$$

根据 A 和 A' 的定义得:

$$r \in A, \quad s \in A', \quad 则\ r < \alpha < s. \tag{1.6}$$

即 α 是 A 和 A' 的分界点. 如在 1.1 节开头所述, 有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 在数轴上是处处稠密的. 由此可知, α 是由满足条件 (1.6) 的 A 和 A' 所确定的唯一的一个实数. 假设除了 α 以外, 还存在一个满足条件的实数 β, 不妨假设 $\alpha > \beta$, 那么必定存在有理数 t, 使得 $\alpha < t < \beta$ 成立. 根据 (1.6), t 既不包含在 A 中也不包含在 A' 中, 这与结论 $A \cup A' = \mathbf{Q}$ 相矛盾.

本节的目的是在假定读者已了解有理数的基础上, 给实数以明确的定义. 现在假设给定一个无理数 α, 如上所述, α 把 $\mathbf{Q}$ 分成满足条件 (1.5) 的两部分 A 和 A'. 反过来, α 是由

A 和 A' 确定的分界点. 在这种情况下, 要在有理数的基础上来定义无理数, 同样可以把这个操作过程反过来. 首先, 把 $\mathbf{Q}$ 分成满足条件 (1.5) 的两部分 A 和 A', 然后用 A 和 A' 的分界点来定义实数. 这是来自于 Dedekind 的分划思想.

下面就根据 Dedekind 思想来阐述实数的定义. 有理直线 $\mathbf{Q}$ 被分割成两个非空子集 A 和 A', 如果 A 和 A' 满足以下两个条件时 , A 和 A' 的组叫做**有理数的分划**(cut,Schnitt), 用记号 $\langle A, A'\rangle$ 来表示.

(1) $r \in A, s \in A'$, 那么 $r < s$;

(2) 没有属于 A 的最大有理数. 即如果 $r \in A$, 则存在 $t \in A$ 使得 $t > r$.

当然, $\mathbf{Q}$ 被分割成 A 和 A' 两部分, 意味着 $\mathbf{Q} = A \cup A', A \cap A' = \varnothing$.

分划 $\langle A, A'\rangle$ 中, A' 是 A 关于 $\mathbf{Q}$ 的补集. 即 A' 是从 $\mathbf{Q}$ 中除去全部属于 A 的有理数后剩下的元素构成的集合. 分划 $\langle A, A'\rangle$ 是由 A 唯一确定的. 由于命题 "如果 $s \in A'$, 那么 $r < s$" 与它的逆否命题 "如果 $s \leqslant r$ 那么, $s \in A$" 等价, 所以, 分划的条件 (1) 只和关于 A 的下列条件等同:

(3) $r \in A$ 时, $s \leqslant r, s \in \mathbf{Q}$, 那么 $s \in A$.

同样, (1) 和涉及 A' 的下列条件也等同.

(3)′ $r \in A'$ 时, $s \geqslant r, s \in \mathbf{Q}$, 那么 $s \in A'$.

定义 1.1　有理数的分划叫做**实数**(real number).

实数用 α, β 等希腊字母来表示. 实数 $\langle A, A'\rangle$ 用 α 表示的时候, 记为 $\alpha = \langle A, A'\rangle$. 所谓两个实数 $\alpha = \langle A, A'\rangle$ 和 $\beta = \langle B, B'\rangle$ 相等 (记 $\alpha = \beta$), 是指 $\langle A, A'\rangle$ 和 $\langle B, B'\rangle$ 是相同的分划. 这也意味着 A 和 B 是相同的集合.

实数论完成之际, $\alpha = \langle A, A'\rangle$ 是 A 和 A' 的分界点, 即对任意的 $r \in A, s \in A'$, 满足不等式 $r < \alpha \leqslant s$ 的实数只有一个. 虽然如此, 但在此阶段不等式 $r < \alpha \leqslant s$ 还没有意义, 所以只能在形式上把分划这一概念定义为实数.

对于分划 $\langle A, A'\rangle$, 可以考虑两种类型:

(I) 没有属于 A' 的最小有理数;

(II) 有属于 A' 的最小有理数.

当 $\langle A, A'\rangle$ 是第 (II) 种类型时, 设 a 是属于 A' 的最小有理数

$$A = \{r \in \mathbf{Q} | r < a\}, \quad A' = \{r \in \mathbf{Q} | r \geqslant a\}. \tag{1.7}$$

此时, 称实数 $\langle A, A'\rangle$等于有理数 a. 记为 $\langle A, A'\rangle = a$. 取任意有理数 a, 根据 (1.7), 若定义分划 $\langle A, A'\rangle$, 当然实数 $\langle A, A'\rangle = a$. 此时我们把实数$\langle A, A'\rangle$和有理数 a 视为相同. 因此, 所有有理数都是实数. 实数 $\langle A, A'\rangle$ 是有理数的无限集合的组, 是同一个有理数处于不同水平的概念. 我们姑且把这二者视为同一, 并把实数概念看成是有理数概念的推广.

$\langle A,A'\rangle$ 在第 (I) 种类型中, 实数 $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 和任意有理数都不同. 此时, 把 $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 叫做**无理数**(irrational number).

b) 实数的大小

实数论完成之际, 因为如果 $\alpha=\langle A,A'\rangle$, 那么 $A=\{r\in\mathbf{Q}|r<\alpha\}$, 所以实数的大小理应定义如下.

定义 1.2 已知两个实数 $\alpha=\langle A,A'\rangle$, $\beta=\langle B,B'\rangle$, 如果 $A\subset B$, 则 α 比 β 小, 或者说 β 比 α 大. 记作 $\alpha<\beta$, $\beta>\alpha$.

当 $\alpha=a$,$\beta=b$ 都是有理数时, 在此作为定义的实数 α,β 的大小和作为有理数 α,β 的大小一致. 从而显然有 $A=\{r\in\mathbf{Q}|r<a\}$, $B=\{r\in\mathbf{Q}|r<b\}$.

定理 1.1 两个实数 α,β 之间的关系是以下三者之一, 并且仅有其中之一成立.

$$\alpha<\beta,\quad \alpha=\beta,\quad \alpha>\beta.$$

证明 $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$ 分别等价于 $A\subset B$, $A=B$, $A\supset B$. 三个关系 $A\subset B$, $A=B$, $A\supset B$ 之中必有某两个不成立, 因此必有其中之一成立. 即只需证 $A\subseteq B$[①] 或 $A\supseteq B$ 即可. 为此, 我们来假定既非 $A\subseteq B$, 也非 $A\supseteq B$, 即存在满足 $a\in A$, 且 $a\notin B$ 的有理数 a 和满足 $b\in B$, 且 $b\notin A$ 的有理数 b. 由于 $a\notin B$, 即 $a\in B'$, 所以根据分划的条件 (1) 得 $b<a$, 同理得 $a<b$. 这是矛盾的. □

定理 1.2 如果 $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, 则 $\alpha<\gamma$.

证明 设 $\alpha=\langle A,A'\rangle$, $\beta=\langle B,B'\rangle$, $\gamma=\langle C,C'\rangle$, 则 $A\subset B$, $B\subset C$. 所以 $A\subset C$, 即 $\alpha<\gamma$. □

定理 1.3 对于任意实数 $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 下式成立.

$$A=\{r\in\mathbf{Q}|r<\alpha\},\quad A'=\{r\in\mathbf{Q}|r\geqslant\alpha\}.\tag{1.8}$$

证明 为了比较有理数 r 和实数 α, 把 r 看作实数, 并用分划来表示:

$$r=\langle R,R'\rangle,\quad R=\{s\in\mathbf{Q}|s<r\},\quad R'=\{s\in\mathbf{Q}|s\geqslant r\}.$$

因为 $A\cup A'=\mathbf{Q}$, $A\cap A'=\varnothing$, 所以要证 (1.8) 式只需证明: 如果 $r\in A$, 则 $r<\alpha$; 如果 $r\in A'$, 则 $r\geqslant\alpha$.

(1) 当 $r\in A$ 时: 根据分划条件 (3), $s<r$, $s\in\mathbf{Q}$, 则由 $s\in A$, 从而 $R\subseteq A$. 又因为 $r\notin R$, 所以 $R\neq A$. 故 $r<\alpha$.

(2) 当 $r\in A'$ 时: 根据分划条件 (3)$'$, $s\geqslant r$, $s\in\mathbf{Q}$, 则由 $s\in A'$ 得 $R'\subseteq A'$. 又因为 R,A 分别是 $\mathbf{Q}$ 中 R' 和 A' 的补集, 因此 $A\subseteq R$, 即 $r\geqslant\alpha$. □

定理 1.3 说明, 实数 $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 成为 A 和 A' 的边界点.

① “$A\subseteq B$” 表示一般的包含关系 (不限于真包含关系).

定理 1.4 对任意两个实数 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$, 存在无数个满足 $\alpha < r < \beta$ 的有理数 r.

证明 设 $\alpha = \langle A, A'\rangle$, $\beta = \langle B, B'\rangle$, 因为 $\alpha < \beta$, 所以 $A \subset B$. 因此存在满足 $b \in B$, $b \notin A$ 的有理数 b. 因为 $b \in A'$, 由定理 1.3, $\alpha \leqslant b$. 根据分划的条件 (2), 因没有属于 B 的最大的有理数, 所以存在无数个满足 $b < r$, $r \in B$ 的有理数 r. 由定理 1.3, $r \in B$ 和 $r < \beta$ 等价, 所以这些有理数 r 都满足不等式 $\alpha < r < \beta$. □

实数全体的集合用 **R** 来表示. 我们可以想象实数按照大小 (<) 顺序排成一行, 把 **R** 叫做**数轴**. 至此在高中数学中含义模糊的数轴概念得以明确定义. **R** 表示数轴时, 称实数为数轴上的点, 把有理数叫做**有理点**, 把无理数叫做**无理点**.

我们在 1.1 节中已经阐述过有理数的集合 **Q** 在数轴上处处稠密. 定理 1.4 表明这一结论在严格定义的数轴上仍然是成立的.

定理 1.5 对给定的自然数 m 及任意实数 α, 存在有理数 a 满足

$$a < \alpha \leqslant a + \frac{1}{m}.$$

证明 设 $\alpha = \langle A, A'\rangle$, 任取 $r_0 \in A$, 对自然数 n, 令 $r_n = r_0 + n/m$. 如果设 $s \in A'$, 当 $n > m(s - r_0)$ 时, $r_n = r_0 + n/m > s$, 因此 $r_n \in A'$. 从而满足 $r_{k-1} \in A$, $r_k \in A'$ 的自然数 k 确定. 令 $a = r_{k-1}$, 则 $a < \alpha \leqslant a + 1/m$. □

这个定理蕴含了实数可以由有理数任意逼近.

c) 无理数

如 1.1 节所述, 在高中数学中, 我们对于无限不循环小数必是实数这一点, 还不能明确地说明. 实数的十进制小数表示在以后的数列的极限中会讲到, 在这里, 先证明无限不循环小数是无理数.

已知无限不循环小数 $k.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots$, 其中 k 为整数, 并令

$$a_n = k.k_1k_2\cdots k_n = k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n}, \quad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}.$$

如 1.1 节所述, 这个无限小数表示实数 α, 无非是实数 α 关于一切自然数 n 满足下面的不等式:

$$a_n \leqslant \alpha < b_n. \tag{1.9}$$

显然, 由 $a_{n-1} \leqslant a_n$ 及 $0 \leqslant k_n \leqslant 9$ 得,

$$b_n = a_{n-1} + \frac{k_n + 1}{10^n} \leqslant a_{n-1} + \frac{10}{10^n} = b_{n-1}.$$

考虑到它是无限不循环小数, 所以从某一位开始, 以后的全部 k_n 不能都是 0, 并且, 从某一位开始, 以后的全部 k_n 也不能都是 9. 即存在无数个满足 $k_m \geqslant 1$ 的

自然数 m. 并且, 存在无数个满足 $k_l \leqslant 8$ 的自然数 l. 对于这样的 m,l, 不等式 $a_{m-1} < a_m$, $b_l < b_{l-1}$ 成立. 即,

$$\begin{aligned} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots a_{m-1} < a_m \leqslant \cdots \\ \leqslant b_l < b_{l-1} \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \end{aligned} \tag{1.10}$$

对所有的自然数 n, 要想证明满足 (1.9) 的实数 α 的存在, 令

$$A' = \{r \in \mathbf{Q} | r \geqslant a_n,\ n = 1,2,3\cdots\}.$$

设 A 是集合 A' 在 $\mathbf{Q}$ 中的补集. $\langle A, A'\rangle$ 成为有理数的分划, 可以通过如下简单的方法确认. 由 (1.10), $a_1 \in A$,$b_1 \in A'$, 即 A 和 A' 都是非空集合. 显然, A' 满足分划的条件 $(3)'$. 因为 A 是由至少对某一个 n, 满足 $r < a_n$ 的有理数 r 全体构成的集合, 所以 A 中没有最大的有理数. 令

$$\alpha = \langle A, A'\rangle.$$

(1.10) 表示对于所有的自然数 n, $a_n \in A$, $b_n \in A'$ 成立. 因此根据定理 1.3, $a_n < \alpha \leqslant b_n$. 再者, (1.10) 表示对于任意的 n, 存在满足 $b_l < b_n$ 的 l. 所以, $\alpha \leqslant b_l < b_n$. 即对于所有的 n,

$$a_n < \alpha < b_n \tag{1.11}$$

成立.

这个 α *是无理数*. 为证明这个结论, 先假定 α 是有理数, 并设 $\alpha = q/p$, (p 为自然数, q 为整数), 不等式 (1.11) 转化为

$$a_n < \frac{q}{p} < a_n + \frac{1}{10^n}, \quad n = 0,1,2,3\cdots, \tag{1.12}$$

但这里 $a_0 = k$. 这一连串不等式, 反过来确定唯一的无限小数 $k.k_1k_2k_3\cdots$. 并且, 它的确定方法和 1.1 节所阐述的操作过程是一致的, 即 $q > 0$ 时, 用十进制法 q 除以 p, 求出 q/p 的循环小数的表示方法. 为验证这一事实, 令

$$r_n = 10^{n-1}p\left(\frac{q}{p} - a_{n-1}\right) = 10^{n-1}q - 10^{n-1}a_{n-1}p,$$

因为 $10^{n-1}a_{n-1}$ 是整数, 所以 r_n 也是整数. 根据式 (1.12), 因为

$$0 < \frac{q}{p} - a_{n-1} < \frac{1}{10^{n-1}},$$

所以

$$0 < r_n < p.$$

又因

$$r_{n+1} = 10^n p \left(\frac{q}{p} - a_{n-1} - \frac{k_n}{10^n} \right) = 10r_n - pk_n,$$

即

$$10r_n = pk_n + r_{n+1}.$$

进一步, 因为 $r_1 = q - pk$, 得到

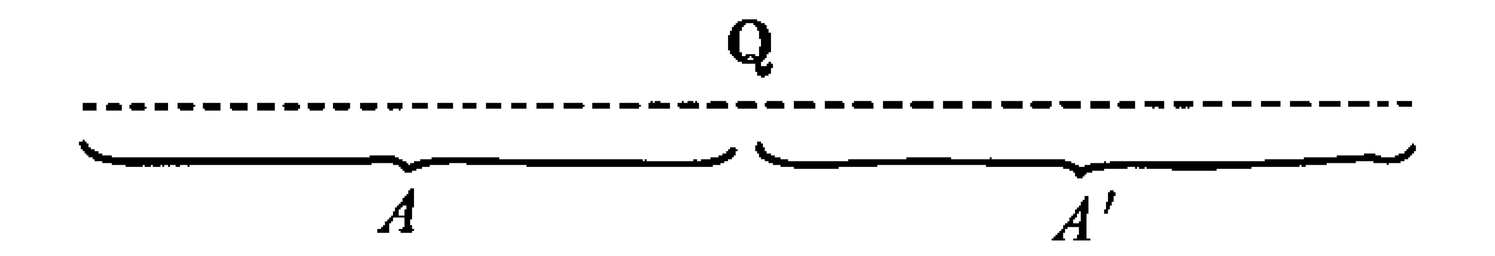
$$\begin{aligned} q &= pk + r_1, & 0 < r_1 < p, \\ 10r_1 &= pk_1 + r_2, & 0 < r_2 < p, \\ &\cdots & \cdots \\ 10r_n &= pk_n + r_{n+1}, & 0 < r_{n+1} < p, \\ &\cdots & \cdots \end{aligned}$$

这正是 $q > 0$ 时, 用十进制法 q 除以 p 的除法运算的操作. 如 1.1 节所述, 因为 $r_1, r_2, \cdots, r_p$ 中至少有两个是相同的, 从而给出了除法运算 q/p 的循环小数的表示方法. 当 $q < 0$ 时可类似地证明. 因此无限小数 $k.k_1k_2k_3\cdots$ 必是循环小数, 这与假设相反. 所以 α 是无理数. □

这样就证明了无限不循环小数都是无理数. 由此我们得知, 无理数在数轴上处处稠密. 即对任意给定的两个实数 $\beta, \gamma(\beta < \gamma)$, 存在无穷多个满足 $\beta < \alpha < \gamma$ 的无理数 α.

d) 实数的连续性

当 $\alpha = \langle A, A' \rangle$ 为无理数时, 因为有理直线 $\mathbf{Q}$ 在 A 和 A' 的分界点处有 "间隙", 所以成为 A 与 A' 分界点的有理数不存在. 正因为有理直线 $\mathbf{Q}$ 在所有地方都存在 "间隙",



所以, 可以想象 $\mathbf{Q}$ 的 "间隙" 全部被无理数填充而成为数轴 $\mathbf{R}$. 数轴 $\mathbf{R}$ 已经不存在间隙了. 这就是实数的连续性. 为了说明 $\mathbf{R}$ 中没有间隙, 我们来考虑一下实数的分划.

数轴 $\mathbf{R}$ 被分割成两个非空子集 A 和 A', 如果 A 和 A' 满足下面条件时, A 与 A' 的组 $\langle A, A' \rangle$ 叫做**实数的分划**:

$$\text{如果 } \rho \in A, \quad \sigma \in A', \quad \text{则 } \rho < \sigma.$$

$\langle A, A' \rangle$ 是实数的分划时, 如果 $\rho \in A$, 则满足 $\tau < \rho$ 的所有实数 τ 都属于 A. 这是显然的. 同理, 如果 $\sigma \in A'$, 则满足 $\tau > \sigma$ 的所有实数 τ 都属于 A'.

定理 1.6　如果 $\langle A, A'\rangle$ 是实数的分划, 则或者存在属于 A 的最大实数或者存在属于 A' 的最小实数.

证明　设 $\mathbf{A} = A \cap \mathbf{Q}, \mathbf{A}' = A' \cap \mathbf{Q}$. 如果存在属于 $\mathbf{A}$ 的最大有理数 a, 那么 a 是属于 A 的最大实数. 如果存在满足 $a < \rho, \rho \in A$ 的实数 ρ, 我们取满足 $a < r < \rho$ 的有理数 r—— 这样的有理数 r 的存在性由 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的处处稠密性来保证 (定理 1.4), 则 $r \in A$, 这与 a 是属于 $\mathbf{A}$ 的最大有理数相反. 故可设 $\mathbf{A}$ 中没有最大的有理数, 则易知 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A}'\rangle$ 是有理数的分划, $\alpha = \langle \mathbf{A}, \mathbf{A}'\rangle$ 是实数, 因此, $\alpha \in A$ 或 $\alpha \in A'$.

如果 $\alpha \in A$, 则 α 是属于 A 的最大实数. 如果存在满足 $\alpha < \rho, \rho \in A$ 的实数 ρ, 我们取满足 $\alpha < r < \rho$ 的有理数 r, 则 $r \in A$, 因此必有 $r \in \mathbf{A}$. 另一方面, 根据定理 1.3, $r \in \mathbf{A}'$. 这是相互矛盾的.

同理, 如果 $\alpha \in A'$, 则 α 是属于 A' 的最小实数. □

根据定理 1.6, 关于实数的分划 $\langle A, A'\rangle$, 必存在成为 A 和 A' 界点的实数 α. 即存在满足条件

$$\rho \in A, \quad \sigma \in A', \quad \text{则 } \rho \leqslant \alpha \leqslant \sigma$$

的实数 α. 这就是实数的连续性. 数轴 $\mathbf{R}$ 上是不存在间隙的.

注意　有理数的分划条件 (2) 是为了叙述能方便简明, 从原则上说是不必要的. 如果去掉条件 (2), 有理数的分划 $\langle A, A'\rangle$, 除了 I 型和 II 型之外, 则出现 A 中存在最大有理数的 III 型. $\langle A, A'\rangle$ 是 III 型时, 设属于 A 的最大有理数是 a, 则 $\langle A, A'\rangle$ 与 a 相等: 只能是 $\langle A, A'\rangle = a$. 因此一个有理数 a 与 II 型和 III 型两种分划相对应, 导致叙述混乱. 为避免这种情况, 加入了条件 (2), 除去了 III 型的分划. 关于实数的分划, 在应用上如果不引入条件 (2) 运用起来反而会更为方便.

1.3　实数的加法与减法

本节将阐述根据有理数的分划所定义的实数的加法、减法. 实数的加减乘除运算我们在高中数学中已经能够运用自如了, 但那时实数尚没有被明确地定义, 所以实数的运算自然也缺乏明确的根据.

在本节中, 我们规定 S 是 $\mathbf{Q}$ 的任意一个子集, S' 是 S 在 $\mathbf{Q}$ 中的补集. 即 $S \cup S' = \mathbf{Q},\ S \cap S' = \varnothing, (S')' = S$.

对任意给定的有理数的两个子集 S, T, 所有 $s \in S$ 和 $t \in T$ 之和 $s+t$ 的全体集合用 $S+T$ 表示:

$$S + T = \{s + t | s \in S, t \in T\}.$$

同样地, $S + t$ 表示:

$$S + t = \{s + t | s \in S\},$$

等等.

关于实数 $\alpha = \langle A, A' \rangle$, 因为 $A = \{r \in \mathbf{Q} | r < \alpha\}$, 所以两个实数的和当然应该如下定义.

定义 1.3 已知任意两个实数 $\alpha = \langle A, A' \rangle$, $\beta = \langle B, B' \rangle$, α 与 β 之和定义为

$$\alpha + \beta = \sigma, \quad \sigma = \langle S, S' \rangle, \quad S = A + B.$$

这里, $\langle S, S' \rangle$ 是有理数的分划, 容易如下验证. 首先, 阐述一个屡屡被用到的关于有理数性质的引理.

引理 1.1 设 a, b 是有理数, 则对满足 $r < a + b$ 的有理数 r, 存在 s, t 使得 $r = s + t, s < a, t < b$ 成立.

证明 如果取 $s = a - (a + b - r)/2, t = b - (a + b - r)/2$, 则显然

$$r = s + t, \quad s < a, \quad t < b. \qquad \square$$

回到 $\langle S, S' \rangle$ 是有理数的分划的证明上, 首先, S 显然不是空集. 其次, 任取 $u \in A', v \in B'$. 则对所有的 $r \in A$, 若 $s \in B$, 则 $r + s < u + v$, 因此 $u + v \notin S$. 即 S' 是非空集合. 任取属于集合 S 的有理数 $a + b, a \in A, b \in B$, 对于满足 $r < a + b$ 的有理数 r, 根据引理 1.1, 可以用两个有理数 $s, t (s < a, t < b)$ 的和来表示: $r = s + t$. 因为 $a \in A$, 所以 $s \in A$, 同理 $t \in B$, 所以 $r = s + t \in S$. 即 S 满足分划的条件 (3). S 中不存在最大的有理数, 这个结论显然可由 A, B 没有最大数得到.

定理 1.7 实数的加法满足结合律和交换律. 即对任意的实数 α, β, γ, 下式成立.

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

证明 设 $\alpha = \langle A, A' \rangle, \beta = \langle B, B' \rangle, \gamma = \langle C, C' \rangle$, 则根据有理数的结合律和交换律,

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A + B = B + A.$$

所以根据定义 1.3, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \alpha + \beta = \beta + \alpha$. $\square$

根据结合律, 如

$$((\alpha + \beta) + \gamma) + \delta = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = \alpha + (\beta + (\gamma + \delta)),$$

无论在什么地方加上括号都是一样, 所以通常表示实数的和时可以省略括号, 如

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

这如同我们在高中数学中学过的一样.

当 $\alpha = a, \beta = b$ 是有理数时, 由定义 1.3, 作为实数和的 $\alpha + \beta$ 与我们已经知道的作为有理数和的 $a + b$ 是一致的: $\alpha + \beta = a + b$. 事实上, 因为 $A = \{r \in \mathbf{Q} | r <$

$a\}, B=\{s\in\mathbf{Q}|s<b\}$, 如果 $r\in A, s\in B$, 那么显然 $r+s<a+b$. 由引理 1.1, 满足条件 $t<a+b$ 的有理数 t 可以表示为 $t=r+s$(r,s 分别是满足条件 $r<a$ 和 $s<b$ 的有理数). 因为 $r\in A, s\in B$, 所以 $t\in A+B$. 从而

$$A+B=\{t\in\mathbf{Q}|t<a+b\},$$

即 $\alpha+\beta=a+b$.

当 $\beta=b$ 是有理数, $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 为任意实数时,

$$\alpha+b=\langle A+b, A'+b\rangle. \tag{1.13}$$

要证明此式, 只须证明 $A+B=A+b$ 即可. 设 $r\in A, s\in B$, 因为 $s<b$, 所以 $r-(b-s)<r$, 从而 $r-(b-s)\in A$. 于是

$$r+s=(r-(b-s))+b\in A+b.$$

反之, 如果设 $r\in A$, 则存在 $t\in A$ 满足条件 $r<t$. 因为 $b-(t-r)\in B$, 所以,

$$r+b=t+(b-(t-r))\in A+B,$$

故 $A+B=A+b$. □

在式 (1.13) 中, 如果设 $b=0$, 则 $\alpha+0=\langle A,A'\rangle=\alpha$, 由交换律,

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha.$$

即 0 是关于加法的单位元.

下面根据实数 α 定义 $-\alpha$. 首先, $\alpha=a$ 是有理数时, 定义 $-\alpha=-a$. 这是显然的. 当 $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 是无理数时, 定义

$$-\alpha=\langle -A',-A\rangle,\quad -A'=\{-r|r\in A'\},\quad -A=\{-r|r\in A\},$$

因为 $\langle A,A'\rangle$ 是 I 型, 所以 $\langle -A,-A'\rangle$ 显然成为有理数的分划.

定理 1.8 $-\alpha+\alpha=\alpha+(-\alpha)=0$.

证明 只须考虑 $\alpha=\langle A,A'\rangle$ 是无理数的情况即可. 设 $r\in A, s\in -A'$, 则 $-s\in A'$, $-s>r$, 所以 $r+s<0$. 反之, 满足条件 $t<0$ 的有理数 t 可表示为 $t=r+s, r\in A, s\in -A'$. 为验证它, 先确定满足 $1/m<-t$ 的一个自然数 m. 根据定理 1.5, 存在满足 $r<\alpha\leqslant r+1/m$ 的一个有理数 r. 如果设 $s=t-r$, 则

$$-s=r-t>r+\frac{1}{m}\geqslant\alpha,$$

因此 $-s \in A'$. 所以 $t = r + s, r \in A, s \in -A'$. 于是

$$A + (-A') = \{t \in \mathbf{Q} | t < 0\},$$

所以 $\alpha + (-\alpha) = 0$. 再由交换律, $-\alpha + \alpha = 0$. □

定理 1.8 表明, 关于加法, $-\alpha$ 是 α 的逆元. 把 $\beta + (-\alpha)$ 记为 $\beta - \alpha$. 根据结合律易得:

$$(\beta - \alpha) + \alpha = \beta, \quad (\beta + \alpha) - \alpha = \beta.$$

至此, 确定了由有理数的分划而定义的实数的加减法的基本法则. 从现在开始, 我们能够很容易推出高中数学中加减法的各种公式. 例如: 因为

$$\alpha = (\alpha - (\beta - \gamma)) + (\beta - \gamma) = ((\alpha - (\beta - \gamma)) + \beta) - \gamma,$$

所以

$$\alpha + \gamma - \beta = ((\alpha - (\beta - \gamma)) + \beta) - \beta = \alpha - (\beta - \gamma),$$

即

$$\alpha - (\beta - \gamma) = \alpha + \gamma - \beta.$$

又, 在此如果设 $\alpha = \beta = 0$, 则

$$-(-\gamma) = \gamma.$$

关于实数的大小和加法, 以下两个定理成立.

定理 1.9 若 $\alpha \leqslant \gamma, \beta \leqslant \delta$, 那么 $\alpha + \beta \leqslant \gamma + \delta$.

证明 如果 $\alpha = \langle A, A' \rangle$, $\beta = \langle B, B' \rangle$, $\gamma = \langle C, C' \rangle$, $\delta = \langle D, D' \rangle$, 则根据假设条件有 $A \subset C, B \subset D$. 所以 $A + B \subset C + D$, 即 $\alpha + \beta \leqslant \gamma + \delta$. □

定理 1.10 若 $\alpha < \gamma$, $\beta \leqslant \delta$, 那么 $\alpha + \beta < \gamma + \delta$.

证明 根据上面的定理 1.9, $\alpha + \beta \leqslant \gamma + \delta$. 为证明 $\alpha + \beta < \gamma + \delta$, 先假设 $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. 因为 $\beta \leqslant \delta$, 所以利用定理 1.9, $\delta - \beta \geqslant \beta - \beta = 0$. 再利用定理 1.9 得,

$$\alpha = \alpha + \beta - \beta = \gamma + \delta - \beta = \gamma + (\delta - \beta) \geqslant \gamma.$$

这与假设 $\alpha < \gamma$ 相矛盾. 所以, $\alpha + \beta < \gamma + \delta$. □

推论 1 不等式 $\alpha > \beta$ 和 $\alpha - \beta > 0$ 等价.

推论 2 不等式 $\alpha < 0$ 和 $-\alpha > 0$ 等价.

至此, 我们确立了关于实数的大小、加减法等我们在高中数学中已经学过的基础知识.

任意的实数 α 的绝对值 $|\alpha|$ 被定义为:

$$\begin{cases} \alpha \geqslant 0\text{时}, & |\alpha| = \alpha, \\ \alpha < 0\text{时}, & |\alpha| = -\alpha. \end{cases}$$

定理 1.11 $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$.

证明与在高中学过的相同.

对于两个实数 α, β, 把 $|\alpha - \beta|$ 叫做数轴上两点 α, β 之间的**距离**.

1.4 数列的极限, 实数的乘法、除法

a) 极限定义

将如 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 这样排成一列的实数称为**数列**(sequence), 用 $\{\alpha_n\}$ 表示. 并且把单个实数 α_n 称为数列的**项**. 关于数列的极限, 我们在高中已经学过, 即若数列 $\{\alpha_n\}$ 的项 α_n 随着 n 的充分增大, 逐渐接近一个固定的实数 α 时, 就称数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α, 或者称 α 为数列 $\{\alpha_n\}$ 的极限值, 记为

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

定义 1.4 明确地表达了 "当 n 充分增大时, α_n 逐渐接近 α".

定义 1.4 设 $\{\alpha_n\}$ 是数列 , α 是实数, 如果对任意正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得只要 $n > n_0(\varepsilon)$, 就有 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, 那么就称数列 $\{\alpha_n\}$**收敛**(converge) 于 α, 或者称 α 是数列 $\{\alpha_n\}$ 的**极限**(limit) 或极限值, 记为

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

当数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于某一个实数时, 我们称数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛, 或者称数列 $\{\alpha_n\}$ 是收敛数列, 或者称极限值 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ 存在等.

定义 1.4 说明, "随着 n 充分增大, α_n 充分接近 α". 换言之, "对于任意正实数 ε, 如果 n 比 $n_0(\varepsilon)$ 大, α_n 与 α 的距离小于 ε". 这种表达方式显著的特征就是, 避免了 "充分增大" "充分接近" 这种含无限大、无限小的模糊词语, 全部使用了有限的自然数、有限的实数. 因为 ε 任意, 所以, 作为 ε 可以选择任意小的正实数, 并且正实数 ε 无论选择多么小, 只要取 n 充分大, 就有 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 成立. 总之, 定义 1.4 把 "随着 n 充分增大, α_n 充分接近 α" 的含义, 仅用有限的自然数和实数就正确地表达出来了.

例 1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = 1.$

这是一个在高中数学中学过的简单数列极限问题. 下面按定义 1.4 来证明结论成立. 对任意给定的正实数 ε, 根据有理数的稠密性, 存在满足 $0 < a < \varepsilon$ 的有理数 a. 由

$$\left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| = \frac{2}{n-1},$$

因为不等式 $2/(n-1) < a$ 与 $n > 2/a + 1$ 等价, 所以, 可选择一个自然数 n_0, 使 $n_0 \geqslant 2/a + 1$ 成立. 如果令 $n_0(\varepsilon) = n_0$, 显然当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $\left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| < \varepsilon$ 成立. 因此,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1.$$

如果把收敛的定义 1.4 换成如下表达方式, 则更便于应用.

定理 1.12 数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于实数 α 的充分必要条件是对任意给定的满足 $\rho < \alpha < \sigma$ 的实数 ρ, σ, 不等式:

$$\rho < \alpha_n < \delta$$

除有限个自然数 n 外都成立.

这里, "除有限个自然数 n 外都成立" 意味着 "对有限个自然数外的全部自然数 n 都成立".

证明 为了证明必要性, 设 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α, 并且给定了满足 $\rho < \alpha < \sigma$ 的实数 ρ, σ, 如果把正实数 $\alpha - \rho$ 和 $\sigma - \alpha$ 中较小的一个设为 ε, 明显地可以得出

$$\rho \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant \sigma.$$

根据假设, 当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 成立, 即

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon.$$

所以除有限个自然数 $n = 1, 2, \cdots, n_0(\varepsilon)$ 外,

$$\rho < \alpha_n < \sigma$$

成立.

下面证明充分性, 对任意给定的正实数 ε, 根据条件,

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon,$$

除有限个自然数 n 外都成立. 取这有限个自然数中最大的一个, 设为 $n_0(\varepsilon)$, 则

$$n > n_0(\varepsilon) \text{ 时}, \quad |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon.$$

□

利用定理 1.12, 可以证明收敛数列 $\{\alpha_n\}$ 的极限唯一. 证明如下：如果假设 $\{\alpha_n\}$ 的极限有两个 α, β 并且 $\alpha < \beta$, 则根据有理数的稠密性, 存在有理数 r 满足 $\alpha < r < \beta$. 根据定理 1.12, 除了有限个 n 外, $\alpha_n < r$. 又除了有限个 n 外, $r < \alpha_n$. 因此, 对无数个 n 出现了两种对立结果 $\alpha_n < r$ 和 $r < \alpha_n$, 产生矛盾.

b) 收敛条件

判断数列是否收敛, 基本的方法是柯西 (Cauchy) 判别法.

定理 1.13(Cauchy 判别法) 数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛的充分必要条件是对于任意正实数 ε, 存在与 ε 相关的一个自然数 $n_0(\varepsilon)$, 只要 $n > n_0(\varepsilon), m > n_0(\varepsilon)$, 就有 $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ 成立.

证明 首先证明必要性. 假设 $\{\alpha_n\}$ 是收敛的, 并设 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.
对于任意给定的正实数 ε, 选择一个有理数 a 满足 $0 < a < \varepsilon$. 由有理数的稠密性知, 有理数 a 显然存在. 根据假设, 对 $a/2$, 存在自然数 n_0, 使其满足当 $n > n_0$ 时, $|\alpha_n - \alpha| < \dfrac{a}{2}$ (ε 为无理数时, 请留意 $\varepsilon/2$ 尚未被定义.) 如果 $n > n_0, m > n_0$, 那么,

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |\alpha_n - \alpha + \alpha - \alpha_m| \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\alpha_m - \alpha| < a$$

所以, 如果令 $n_0(\varepsilon) = n_0$, 则当 $n, m > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ 成立.

这样, 条件的必要性从收敛的定义 1.4 可直接获得. Cauchy 判别法的核心是充分性条件. 在充分性的证明中, 实数的连续性是不可缺少的条件. 现设 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α, 根据定理 1.12, 当 $\rho < \alpha$ 时, 满足 $\alpha_n \leqslant \rho$ 的 n 至多有有限个; 当 $\rho > \alpha$ 时, 满足 $\alpha_n \leqslant \rho$ 的 n 有无数个. 以此为切入点, 进行如下充分性的证明.

假定对于任意正实数 ε, 存在与 ε 相关的一个自然数 $n_0(\varepsilon)$, 当 $n > n_0(\varepsilon), m > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ 成立. 设 A 是实数 ρ 的全体集合, 使得满足 $\alpha_n \leqslant \rho$ 的 n 至多为有限个, 并设 A' 是 $\mathbf{R}$ 中 A 的补集. A' 也就是使 $\alpha_n \leqslant \sigma$ 成立的无数个实数 σ 的全体. 因此, 如果 $\rho \in A, \sigma \in A'$, 那么 $\rho < \sigma$. 又选取使 $l > n_0(1)$ 成立的自然数 l, 并设 $\beta = \alpha_l$, 则 $n > n_0(1)$ 时, $\beta - 1 < \alpha_n < \beta + 1$ 成立. 因此 $\beta - 1 \in A, \beta + 1 \in A'$, 即 A 和 A' 为非空集合. $< A, A' >$ 是实数的分划. 因此, 根据定理 1.6(实数的连续性)A 中有最大数, 否则 A' 中有最小数. 把这个最大数或最小数设为 α, 为证明数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于实数 α, 根据定理 1.12 只须证明对任意给定的满足 $\rho < \alpha < \sigma$ 的实数 ρ, σ, 不等式 $\rho < \alpha_n < \sigma$ 除有限个 n 外都成立即可.

首先, 由 $\rho < \alpha$ 得 $\rho \in A$, 使 $\alpha_n \leqslant \rho$ 成立的 n 至多有有限个, 即除了有限个 n 外, $\rho < \alpha_n$ 成立.

其次, 因为 $\rho < \alpha$, 所以根据有理数的稠密性, 存在使 $\alpha < r < \sigma$ 成立的有理数 r. 选取一个 r, 满足 $\alpha < r < \sigma$, 并令 $\varepsilon = \sigma - r$, 根据假设, 当 $n > n_0(\varepsilon), m > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon = \sigma - r$ 成立. 另一方面, 因为 $r > \alpha$, 所以 $r \in A'$, 因此, 有无数个自然数 m 使 $\alpha_m \leqslant r$ 成立. 这无数个 m 当中, 当然存在 (无数个)$m > n_0(\varepsilon)$. 如果确

定了一个这样的 m, 则当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $\alpha_n - \alpha_m < \sigma - r, \alpha_m \leqslant r$, 因此 $\alpha_n < \sigma$. 即除了有限个 n 外, 不等式 $\alpha_n < \sigma$ 成立. □

c) 极限的大小、加法和减法

从数列 $\{\alpha_n\}$ 中除去有限个或无限个项之后得到的数列 $\{\alpha_{m_n}\}$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$, 叫做 $\{\alpha_n\}$ 的**子数列**(subsequence). 例如, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \cdots, \alpha_{n!}, \cdots$, 即 $\{\alpha_{n!}\}$ 是 $\{\alpha_n\}$ 的子数列. 数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于实数 α 时, $\{\alpha_n\}$ 的子数列 $\{\alpha_{m_n}\}$ 收敛于相同的极限. 根据收敛的定义 1.4, 这是显然的. 另外, 改变收敛数列 $\{\alpha_n\}$ 中的有限个项, 其极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ 不变. 这也是显然的.

定理 1.14 设数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 收敛, 如果对无数个自然数 n, 都有 $\alpha_n \leqslant \beta_n$, 那么, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

证明 设 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$, 并假设 $\alpha > \beta$. 如果给定一个满足 $\beta < r < \alpha$ 的有理数 r. 则根据定理 1.12, 除有限个 n 外都有 $\beta_n < r$, 且除有限个 n 外, 也都有 $\alpha_n > r$. 所以在满足 $\alpha_n \leqslant \beta_n$ 的无数个 n 中除去有限个外都有 $\beta_n < r < \alpha_n$ 成立. 产生矛盾, 即 $\alpha > \beta$ 不可能成立, 因此 $\alpha \leqslant \beta$. □

对所有 n, 如果 $\rho_n = \rho$, 则数列 $\{\rho_n\}$ 必然收敛于 ρ. 因此, 将定理 1.14 中的 $\{\alpha_n\}$ 或 $\{\beta_n\}$ 都换成 $\{\rho_n\}$, 则得下面的推论.

推论 设数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛, 如果对无数个 n, 都有 $\alpha_n \leqslant \rho$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \rho$; 如果对无数个 n, 都有 $\alpha_n \geqslant \rho$, 那么, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \geqslant \rho$.

定理 1.15 如果数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 收敛, 则数列 $\{\alpha_n + \beta_n\}, \{\alpha_n - \beta_n\}$ 也收敛. 并且

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \lim_{n\to\infty} \beta_n, \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n - \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

证明 设 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$. 对任意给定的正实数 ε, 如果选取一个满足 $0 < r < \varepsilon$ 的有理数 r, 则对应于 $r/2$ 存在一个自然数 n_0, 只要 $n > n_0$, 就有 $|\alpha_n - \alpha| < \dfrac{r}{2}, |\beta_n - \beta| < \dfrac{r}{2}$ 成立. 因此

$$|\alpha_n + \beta_n - \alpha - \beta| \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < r.$$

所以, 如果取 $n_0(\varepsilon) = n_0$, 则当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_n + \beta_n - \alpha - \beta| < \varepsilon$ 成立. 即数列 $\{\alpha_n + \beta_n\}$ 收敛于 $\alpha + \beta$. 同理, 数列 $\{\alpha_n - \beta_n\}$ 收敛于 $\alpha - \beta$. □

如果所有的项 a_n 都是有理数, 则称数列 $\{a_n\}$ 为**有理数列**.

定理 1.16 实数都可以表示成有理数列的极限. 即对于任意的实数 α, 存在收敛于 α 的有理数列 $\{a_n\}$.

证明 根据定理 1.5, 对于每一个自然数 n, 都存在满足

$$a_n < \alpha \leqslant a_n + \frac{1}{n}$$

的有理数 a_n. 对任意给定的正实数 ε, 选取一个满足 $0 < r < \varepsilon$ 的有理数 r, 确定一个满足 $n_0 > 1/r$ 的自然数 n_0, 并设 $n_0(\varepsilon) = n_0$, 则因 $1/n_0 < r < \varepsilon$, 所以当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $|a_n - \alpha| = \alpha - a_n \leqslant \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ 成立. 即有理数列 $\{a_n\}$ 收敛于 α. □

d) 实数的乘法和除法

我们尚未定义实数的乘法和除法. 根据定理 1.16, 实数都可以表示成有理数列的极限. 因此, 要想定义两个实数 α, β 的积 $\alpha\beta$, 就要把 α, β 分别表示成有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 并令 $\alpha\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 即可, 这是非常自然的想法.

引理 1.2　(1) 如果有理数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛, 则以 a_n 和 b_n 的积 $a_n b_n$ 作为项的数列 $\{a_n b_n\}$ 也收敛.

(2) 当 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 仅由 α 和 β 唯一确定, 而不依赖于收敛于 α 和 β 的有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的选取.

证明　(1) 根据假设, 因为 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛, 所以由 Cauchy 判别法, 对任意的正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 只要 $n > m_0(\varepsilon), m > m_0(\varepsilon)$, 就有 $|a_n - a_m| < \varepsilon, |b_n - b_m| < \varepsilon$ 成立. 令 $\varepsilon = 1, m_1 = m_0(1) + 1$, 则 $n > m_0(1)$ 时, $|a_n - a_{m_1}| < 1$, 从而 $|a_n| < 1 + |a_{m_1}|$. 因此, 取有理数 c, 使得 c 比 $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{m_0(1)}|, 1 + |a_{m_1}|$ 中任一个数都大, 则对所有的 $n > m_0(1)$, $|a_n| < c$ 都成立. 因为对 $|b_n|$ 也同样如此, 所以只要选取适当的有理数 c, 则对所有的 n,

$$|a_n| < c, \quad |b_n| < c$$

都成立.

下面利用 Cauchy 判别法来证明数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛. 因为

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |(a_n - a_m)b_n + a_m(b_n - b_m)| \leqslant |a_n - a_m||b_n| + |a_m||b_n - b_m|,$$

所以

$$|a_n b_n - a_m b_m| \leqslant c|a_n - a_m| + c|b_n - b_m|.$$

对任意给定的正实数 ε, 选取一个满足 $0 < r < \varepsilon$ 的有理数 r, 令 $n_0(\varepsilon) = m_0(r/2c)$, 则只要 $n > n_0(\varepsilon), m > n_0(\varepsilon)$, 就有 $|a_n - a_m| < r/2c, |b_n - b_m| < r/2c$ 成立. 从而

$$|a_n b_n - a_m b_m| < c \cdot \frac{r}{2c} + c \cdot \frac{r}{2c} = r < \varepsilon.$$

所以数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛.

(2) 首先对满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的任意有理数列 $\{a'_n\}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 成立. 因为 $|b_n| < c$, 所以

$$|a'_n b_n - a_n b_n| = |a'_n - a_n||b_n| \leqslant c|a'_n - a_n|.$$

对任意给定的正实数 ε, 选取一个满足 $0 < r < \varepsilon$ 的有理数 r, 则根据定理 1.15

$$\lim_{n\to\infty}(a'_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} a'_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

所以, 存在对应于 r/c 的自然数 n_0, 只要 $n > n_0$, 就有 $|a'_n - a_n| < r/c$ 成立. 因此, 令 $n_0(\varepsilon) = n_0$, 则当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $|a'_n b_n - a_n b_n| < c \cdot \dfrac{r}{c} = r < \varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(a'_n b_n - a_n b_n) = 0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a'_n b_n - \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}(a'_n b_n - a_n b_n) = 0.$$

于是, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. 同理, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b'_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n b'_n = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n b_n$. 所以, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b'_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n b'_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. □

定义 1.5 已知实数 α, β 分别为有理数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的极限, 即 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 我们把 α 与 β 的积定义为

$$\alpha\beta = \lim_{n\to\infty} a_n b_n.$$

根据这个定义, 引理 1.2 保证了 α 与 β 的积的唯一性. α 和 β 的积 $\alpha\beta$ 也常写成 $\alpha \cdot \beta$.

有理数 a 是项 a_n 都等于 a 的数列 $\{a\}$ 的极限. 由此知, 当 $\alpha = a, \beta = b$ 都是有理数时, 这里定义的积 $\alpha\beta$ 与我们已知的有理数的积 ab 是一致的.

关于乘法的**结合律**、**交换律**以及加法和乘法的**分配律**对有理数成立, 这是已知的. 这些结果如果照搬到极限中对于实数也同样成立. 即

定理 1.17 对任意实数 α, β, γ, 下列式子成立:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad \alpha\beta = \beta\alpha \quad \alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

证明 α, β, γ 作为有理数列的极限, 可表示为 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

根据定义, 因为

$$\beta\gamma = \lim_{n\to\infty} b_n c_n, \quad \alpha\beta = \lim_{n\to\infty} a_n b_n, \text{ 且 } a_n(b_n c_n) = (a_n b_n)c_n,$$

所以

$$\alpha(\beta\gamma) = \lim_{n\to\infty} a_n(b_n c_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n)c_n = (\alpha\beta)\gamma.$$

同理

$$\alpha\beta = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} b_n a_n = \beta\alpha.$$

由定理 1.15

$$\beta+\gamma = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(b_n+c_n),$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n b_n + \lim_{n\to\infty} a_n c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n + a_n c_n),$$

因此

$$\alpha(\beta+\gamma) = \lim_{n\to\infty} a_n(b_n+c_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n + a_n c_n) = \alpha\beta+\alpha\gamma.$$ □

因为 0 是所有项都等于 0 的数列 $\{0\}$ 的极限, 所以易知

$$\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0.$$

同理

$$\alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha.$$

即 1 是实数乘法中的单位元.

为了定义实数的**逆元**(倒数), 我们先证明下面的引理.

引理 1.3 已知实数 $\alpha, \alpha\neq 0$, 如果设 α 是有理数列 $\{a_n\}$ 的极限, 即 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $a_n\neq 0$. 则以 a_n 的倒数 $1/a_n$ 作为项组成的数列收敛.

证明 设 c 是当 $\alpha>0$ 时 $\alpha>c>0$, 当 $\alpha<0$ 时 $\alpha<c<0$ 的有理数. 由定理 1.12, 根据 $\alpha>0$ 或 $\alpha<0$, 除了有限个自然数 n 外, $a_n>c$ 或 $a_n<c$. 不论哪种情况, 除了有限个 n 外, $|a_n|>|c|$. 即使改变有限个项 a_n, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 也不会改变. 因此对于所有的 n 可以令

$$|a_n| > |c| = 0.$$

因为 $\{a_n\}$ 收敛, 所以对任意给定的正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 只要 $n>m_0(\varepsilon), m>m_0(\varepsilon)$ 时, 就有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$ 成立.

因为

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_m}\right| = \left|\frac{a_m-a_n}{a_n a_m}\right| < \frac{1}{|c|^2}|a_n-a_m|,$$

所以对任意给定的正实数 ε, 选取一个满足 $0<r<\varepsilon$ 的有理数 r, 并设 $n_0(\varepsilon) = m_0(|c|^2 r)$, 则只要 $n>n_0(\varepsilon), m>n_0(\varepsilon)$ 时, 就有 $\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_m}\right| < \frac{1}{|c|^2}|c|^2 r = r < \varepsilon$ 成立. 所以, 据 Cauchy 判别法, 数列 $\{1/a_n\}$ 收敛. □

定义 1.6 对实数 $\alpha, \alpha \neq 0$, 如果设 α 是有理数列 $\{a_n\}$ 的极限, 即 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, a_n \neq 0$, 则 α 的逆元 $1/\alpha$ 定义为

$$\frac{1}{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}.$$

根据积的定义

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1.$$

数列 $\{1/a_n\}$ 的收敛性由引理 1.3 保证, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n$ 仅由 α 确定, 而不依赖于收敛于 α 的数列 $\{a_n\}$. 为此, 任取满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = \alpha$ 的数列 $\{a'_n\}$, 并设 $(1/\alpha)' = \lim\limits_{n\to\infty} 1/a'_n$. 于是可得 $\alpha(1/\alpha)' = 1$. 所以

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot 1 = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)'\right) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)' = 1 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)' = \left(\frac{1}{\alpha}\right)',$$

即 $1/\alpha$ 仅由 α 唯一确定.

任意实数 β 除以实数 $\alpha(\alpha \neq 0)$ 所得的**商**定义为

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \beta.$$

则显然有

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \beta.$$

定理 1.18 对任意两个实数 α, β, 若 $\alpha > 0, \beta > 0$, 则 $\alpha\beta > 0$.

证明 α,β 作为有理数列的极限可表示为 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 若 a, b 是满足 $\alpha > a > 0, \beta > b > 0$ 的有理数, 则根据定理 1.12, 除了有限个 n 外, 有 $a_n > a, b_n > b$, 因此 $a_n b_n > ab$. 所以, 据定理 1.14 的推论

$$\alpha\beta = \lim_{n\to\infty} a_n b_n \geqslant ab > 0. \qquad \square$$

在上面作为有理数的分划而严密地定义的关于实数的大小和加减乘除的基本法则是:

$$\begin{aligned}
&\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, && \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,\\
&\alpha + \beta = \beta + \alpha, && \alpha\beta = \beta\alpha,\\
&\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, && (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha,\\
&\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, && \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha,\\
&(\beta - \alpha) + \alpha = \beta, && \alpha \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \beta,\\
& && \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0,
\end{aligned}$$

$$\text{若}\ \alpha < \gamma, \quad \beta \leqslant \delta,\ \text{则} \quad \alpha + \beta < \gamma + \delta,$$
$$\text{若}\ \alpha > 0, \quad \beta > 0,\ \text{则} \quad \alpha\beta > 0.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$, 关于加、减、乘、除构成域. 所以把 $\mathbf{R}$ 叫做**实数域.**

我们在高中学过的关于实数大小和加减乘除的各种公式都可由上面的基本法则简单地导出来. 例如, 因为

$$\alpha\beta = \alpha(\beta - \gamma + \gamma) = \alpha(\beta - \gamma) + \alpha\gamma;$$

所以

$$\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma.$$

同理

$$(\beta - \alpha)\gamma = \beta\gamma - \alpha\gamma.$$

在此若令 $\beta = 0$, 则

$$\alpha(-\gamma) = (-\alpha)\gamma = -\alpha\gamma.$$

因此 $(-\alpha)(-\gamma) = -((-\alpha)\gamma) = -(-\alpha\gamma) = \alpha\gamma$, 即

$$(-\alpha)(-\gamma) = \alpha\gamma.$$

从此式知, 若 $\alpha < 0, \beta < 0$, 则 $\alpha\beta > 0$. 同理, 若 $\alpha < 0, \beta > 0$, 则 $\alpha\beta < 0$
所以

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|.$$

又若 $\alpha > 0, \dfrac{1}{\alpha} < 0$, 则 $1 = \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} < 0$, 产生矛盾, 所以 $\alpha > 0$, 则 $\dfrac{1}{\alpha} > 0$. 若 $\alpha > \beta > 0$, 则 $\alpha - \beta > 0, \alpha\beta > 0$, 所以 $1/\alpha\beta > 0$. 因此 $\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} > 0$, 从而 $\dfrac{1}{\beta} > \dfrac{1}{\alpha}$. 即若 $\alpha > \beta > 0$, 则 $\dfrac{1}{\beta} > \dfrac{1}{\alpha} > 0$.

在高中学过的这类公式以后可以自由使用.

e) 极限的乘法和除法

定理 1.19 (1) 如果数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 收敛, 则数列 $\{\alpha_n\beta_n\}$ 也收敛, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \cdot \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

(2) 如果数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 收敛, 且 $\alpha_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, 则数列 $\{\beta_n/\alpha_n\}$ 也收敛, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

证明 (1) 如果 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$, 对任意的正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 只要 $n > m_0(\varepsilon)$, 就有 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, |\beta_n - \beta| < \varepsilon$ 成立. 因为

$$|\alpha_n\beta_n - \alpha\beta| = |\alpha_n(\beta_n - \beta) + \beta(\alpha_n - \alpha)| \leqslant |\alpha_n||\beta_n - \beta| + |\beta||\alpha_n - \alpha|,$$

所以若 $n > m_0(\varepsilon)$, 则 $|\alpha_n\beta_n - \alpha\beta| < (|\alpha_n| + |\beta|)\cdot\varepsilon$. 另一方面若 $n > m_0(1)$, 则 $|\alpha_n| \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$. 因此, 对任意的正实数 ε, 取

$$n_0(\varepsilon) = m_0\left(\frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}\right) + m_0(1),$$

则当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, 就有 $|\alpha_n\beta_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ 成立, 即数列 $\{\alpha_n\beta_n\}$ 收敛于 $\alpha\beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \cdot \lim_{n\to\infty} \beta_n$.

(2) 首先证明如果 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, 则 $\lim_{n\to\infty} 1/\alpha_n = 1/\alpha$. 对任意的正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 只要 $n > m_0(\varepsilon)$ 时, 就有 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ 成立. 根据假设, 因为 $|\alpha| > 0$, 所以

$$\left|\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - \alpha_n}{\alpha_n\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_n||\alpha|}.$$

这里如果 $n > m_0(|\alpha|/2)$, 则 $|\alpha_n - \alpha| < |\alpha|/2$, 所以 $|\alpha_n| > |\alpha|/2$. 即 $1/|\alpha_n| < 2/|\alpha|$. 故只要取

$$n_0(\varepsilon) = m_0\left(\frac{|\alpha|^2\varepsilon}{2}\right) + m_0\left(\frac{|\alpha|}{2}\right),$$

则当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, 就有 $\left|\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon$ 成立, 即 $\{1/\alpha_n\}$ 收敛于 $1/\alpha = 1/\lim_{n\to\infty} \alpha_n$. 综合这个结果和结果 (1), 就可以获得数列 $\{\beta_n/\alpha_n\}$ 收敛于 $\beta/\alpha = \lim_{n\to\infty} \beta_n / \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ 的结论. □

上述定理 1.14、定理 1.15 和定理 1.19 确立了高中数学中学过的极限的大小和加减乘除的基本法则. 以后, 这些法则可以自由使用.

f) 实数的十进制小数的表示

对给定的十进制小数

$$k.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots,$$

如果

$$a_n = k.k_1k_2\cdots k_n = k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_n}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n},$$

当 $m > n$ 时

$$0 \leqslant a_m - a_n = 0.\overbrace{00\cdots0}^{n}k_{n+1}\cdots k_m \leqslant 0.\overbrace{0\cdots01}^{n} = \frac{1}{10^n},$$

因此

$$|a_m - a_n| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

对任意给定的正实数 ε, 若取自然数 $n_0(\varepsilon)$ 使得 $10^{n_0(\varepsilon)} > 1/\varepsilon$ 成立, 则只要 $n > n_0(\varepsilon)$, 就有

$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^{n_0(\varepsilon)}} < \varepsilon$$

成立. 因此, 数列 $\{a_n\}$ 收敛. 令其极限为 α, 即

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad a_n = k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n}. \tag{1.14}$$

此时, 记

$$\alpha = k.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots.$$

所有的十进制小数在式 (1.14) 的意义下都表示实数.

反之, 所有的实数都可以用十进制小数来表示. 这一点已经在 1.1 节中从高中数学的角度进行了说明, 它完全适用于作为有理数分划而严密定义的实数. 即对给定的实数 α, 如果满足

$$k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} \leqslant \alpha < k + \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_n + 1}{10^n} \tag{1.15}$$

的整数 k 和数字 $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n, \cdots$ 依次定下来, 则因为

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{10^n}, \quad a_n = k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n},$$

所以, 式 (1.14) 成立.

众所周知, 因为

$$1 = 0.9999\cdots9\cdots,$$

当 α 等于有限小数 $k.k_1k_2k_3\cdots k_n, k_n \geqslant 1$ 时, α 有两种十进制小数的表示方法:

$$\alpha = k.k_1k_2\cdots k_{n-1}k_n000\cdots0\cdots,$$
$$\alpha = k.k_1k_2\cdots k_{n-1}l_n999\cdots9\cdots, \quad l_n = k_n - 1.$$

排除这种情况, 实数 α 的十进制小数的表示唯一. 为了证明它, 假设 α 有两种十进制小数的表示:

$$\begin{aligned}\alpha &= k.k_1k_2\cdots k_{n-1}k_nk_{n+1}\cdots k_m\cdots\\ &= k.k_1k_2\cdots k_{n-1}k'_nk'_{n+1}\cdots k'_m\cdots,\end{aligned}$$

并设 $k'_n < k_n$. 如果从 α 减去 $k.k_1k_2k_3\cdots k_{n-1}$ 再乘以 10^n, 则

$$k_n.k_{n+1}k_{n+2}\cdots k_m\cdots = k'_n.k'_{n+1}k'_{n+2}\cdots k'_m\cdots.$$

因此, 若 $d_m = k'_m - k_m$, 则

$$1 \leqslant k_n - k'_n = \frac{d_{n+1}}{10} + \frac{d_{n+2}}{10^2} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{10^m} + \cdots.$$

k_m, k'_m 取值在 0 到 9 之间, 所以 $d_m \leqslant 9$, 并且仅当 $k'_m = 9$ 和 $k_m = 0$ 时, $d_m = 9$. 如果把上面的不等式与等式

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^m} + \cdots = 0.999\cdots 9\cdots = 1$$

进行比较, 则对于所有自然数 m, $d_{n+m} = 9$. 因此, 必有 $k_{n+m} = 0$ 成立, 即 α 等于有限小数 $k.k_1k_2k_3\cdots k_n$.

1.5 实数的性质

至此, 我们把有理数的大小和加减乘除作为已知, 在此基础上为了严密地处理实数及其大小和加减乘除, 用 a, b, c, r, s 等英文字母来表示有理数, 用 $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ 等希腊字母来表示实数, 对有理数与实数进行了区分. 但在实数及其大小、加减乘除法则都明确后, 再没有区分使用的必要. 在以下的论述中, a, b, c, r, s 等也表示实数.

a) 上确界和下确界

实数的集合, 即考虑 $\mathbf{R}$ 中非空子集 S. 如果属于 S 的所有实数 s 都不大于某个实数 μ, 即如果 $s \in S$ 就有 $s \leqslant \mu$, 那么称 ***S*有上界**(bounded to the above). 也把 μ 称为 S 的一个**上界**(upper bound). S 有上界时, S 的上界当然有无穷多个, 其中存在最小的上界. 它可以根据实数的连续性很容易地证得: 设 M' 是 S 的所有上界构成的集合, M 是 M' 在 $\mathbf{R}$ 中的补集. 若 $\lambda \in M, \mu \in M'$, 则因为 λ 不是 S 的上界, 所以存在 $s \in S$ 满足 $\lambda < s$, 又因为 μ 是 S 的上界, 所以 $s \leqslant \mu$, 从而 $\lambda < \mu$. 即 $\langle M, M' \rangle$ 是实数的分划. 另外, 因为满足 $\lambda < \nu < s$ 的实数 ν 属于 M, 所以 M 中没有最大数. 从而根据实数的连续性 (定理 1.6), 属于 M' 的最小数即 S 的最小上界存在. 把 S 的最小上界叫做 S 的**上确界**(supremum). 记为

$$\sup_{s \in S} s.$$

因为 S 的上确界 a 是 M' 的最小数. 所以可以根据下面的条件唯一确定:

(i) 如果 $s \in S$, 那么 $s \leqslant a$.

(ii) 如果 $c < a$, 那么满足条件 $c < s$ 的 $s \in S$ 存在.

同理, 如果存在实数 μ, 使得对任意的 $s \in S$, $\mu \leqslant s$ 都成立, 则称 **S有下界**(bounded to the below), 并把 μ 叫做 S 的一个**下界**(lower bound). S 的下界中存在最大数, 把它称为 S 的**下确界** (infimum), 记为

$$\inf_{s\in S} s.$$

如果 S 有上界并且也有下界, 我们就说 **S有界**(bounded).

对数列的上确界和下确界也可类似定义, 即给定数列 $\{a_n\}$ 时, 考虑作为它的项 a_n 出现的全体实数构成的集合 S[①], 如果 S 有上界, 那么就称 $\{a_n\}$ 有上界; 如果 S 有下界, 那么就称 $\{a_n\}$ 有下界, 并且把 S 的上确界和下确界, 分别叫做数列 $\{a_n\}$ 的上确界和下确界. $\{a_n\}$ 的上确界和下确界分别用符号表示为

$$\sup_n a_n, \quad \inf_n a_n.$$

另外, 若 S 有界, 则称数列 $\{a_n\}$ 有界. 根据定理 1.12, 显然收敛的数列是有界的.

b) 单调数列

当 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单向增加, 称 $\{a_n\}$ 为**单调递增的**(monotone increasing); 当 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单向减少, 称 $\{a_n\}$ 为**单调递减的**(monotone decreasing). 当 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单向不减少, 称 $\{a_n\}$ 为**单调非减的**; 当 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单向不增加, 称 $\{a_n\}$ 为**单调非增的**.

定理 1.20 (1) 有上界的单调非减数列收敛于其上确界.

(2) 有下界的单调非增数列收敛于其下确界.

证明 设 $\{a_n\}$ 是有上界的单调非减数列. 若令 $a = \sup_n a_n$, 则对所有的 n 有 $a_n \leqslant a$. 又对给定的正实数 ε, 存在 n, 使得 $a - \varepsilon < a_n$ 成立. 取其中的一个 n 为 $n_0(\varepsilon)$, 则只要 $n > n_0(\varepsilon)$, 就有

$$a - \varepsilon < a_{n_0(\varepsilon)} \leqslant a_n \leqslant a,$$

因此

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 所以结论 (1) 成立. (2) 的证明与 (1) 完全相同. □

当单调不减数列 $\{a_n\}$ 没有上界时, 对任意实数 μ 存在 n, 使得 $a_n > \mu$, 取这个 n 中的一个为 $n_0(\mu)$, 则只要 $n > n_0(\mu)$, 就有

$$a_n \geqslant a_{n_0(\mu)} > \mu.$$

① S 未必是无限集合. 例如, 对所有的 n, $a_n = a$ 时, S 是仅由一个实数 a 构成的集合 $\{a\}$.

一般地, 关于数列 $\{a_n\}$, 若对任意实数 μ, 存在自然数 $n_0(\mu)$, 使得只要 $n > n_0(\mu)$, 就有 $a_n > \mu$, 那么就说数列 $\{a_n\}$**发散**(diverge) 于正**无穷大**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

没有上界的单调非减数列, 发散于正无穷大.

同理, 若对于任意 μ, 存在自然数 $n_0(\mu)$, 使得只要 $n > n_0(\mu)$, 就有 $a_n < \mu$, 那么就说数列 $\{a_n\}$**发散**于负**无穷大**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

没有下界的单调非增数列, 发散于负无穷大.

数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大或发散于负无穷大时, 虽然可以记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 但此时极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在. 要说极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在的话, 就意味着数列 $\{a_n\}$收敛于其极限.

c) 上极限和下极限

已知有界数列 $\{a_n\}$, 从数列 $\{a_n\}$ 中除去开始的 m 项, 把剩余的 $a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots, a_{m+n}, \cdots$ 的下确界设为 α_m, 并记为

$$\alpha_m = \inf_n a_{m+n}.$$

显然, 数列 $\{\alpha_m\}$ 单调非减且有界. 所以, 根据定理 1.20, $\{\alpha_m\}$ 收敛. 把极限 $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m$ 叫做数列的**下极限**(inferior limit), 并记为 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 或 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$. $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 具有下面的性质: 对任意给定的正实数 ε, 以下两条结论成立,

(i) 使 $a_n \leqslant \alpha - \varepsilon$ 成立的项 a_n 至多有有限个;

(ii) 使 $a_n \leqslant \alpha + \varepsilon$ 成立的项 a_n 有无数个.

究其原因, 由于 α 是 $\{\alpha_m\}$ 的上确界, 所以对应于 ε 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 使得 $m > m_0(\varepsilon)$ 时, $\alpha - \varepsilon < \alpha_m \leqslant \alpha$ 成立. 因为 $\alpha_m = \inf\limits_n a_{m+n}$, 即 $\alpha_m = \inf\limits_{n>m} a_n$. 因此, 若 $n > m$, 则 $a_n \geqslant \alpha_m > \alpha - \varepsilon$, 换言之, 若 $a_n \leqslant \alpha - \varepsilon$, 则 $n \leqslant m$. 又对于各个 $n > m$, 存在 a_n 使得 $a_n < \alpha_m + \varepsilon$ 成立. 所以满足 $a_n < \alpha + \varepsilon$ 的项 a_n 有无数个.

同理, 设 $\beta_m = \sup\limits_n a_{m+n}$, 则单调非增数列 $\{\beta_m\}$ 收敛, 其极限 $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m$ 叫做数列 $\{a_n\}$ 的**上极限**(superior limit), 记为 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, 或 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. 设 $\beta = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, 则对任意给定的正实数 ε, 下面两个结论成立,

(i) 使 $a_n \geqslant \beta + \varepsilon$ 成立的项 a_n 至多有有限个;

(ii) 使 $a_n > \beta - \varepsilon$ 成立的项 a_n 有无数个.

总之, 有界数列$\{a_n\}$常存在上极限$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$和下极限$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. 因为 $\inf\limits_n a_{m+n}\leqslant \sup\limits_n a_{m+n}$, 所以

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

其中等式成立的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 收敛.

[证明] 首先假设等式成立, 令

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

根据上极限和下极限的性质 (i), 任意给定正实数 ε 时, 除了有限个项 a_n 外, 都有

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon.$$

所以根据定理 1.12, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 反之, 假定数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 对任意的正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 只要 $n > n_0(\varepsilon)$, 就有 $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$. 若设 $\alpha_m = \inf\limits_n a_{m+n}, \beta_m = \sup\limits_n a_{m+n}$, 则当 $m > m_0(\varepsilon)$ 时, $a-\varepsilon \leqslant \alpha_m \leqslant \beta_m \leqslant a+\varepsilon$. 所以, 例如取 $n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon/2)$, 则当 $m > n_0(\varepsilon)$ 时, $|\alpha_m - a| < \varepsilon, |\beta_m - a| < \varepsilon$.
因此

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty} \beta_m = a,$$

即

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a. \qquad \square$$

于是有界数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限一致.$\{a_n\}$ 收敛时, 易知

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

数列 $\{a_n\}$ 无上界时, 其上极限定义为

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

数列 $\{a_n\}$ 无下界时, 其下极限定义为

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

数列 $\{a_n\}$ 无上界但有下界时, 存在 $\alpha_m = \inf\limits_n a_{m+n}$ 且数列 $\{\alpha_m\}$ 是单调非减数列. 因此, 数列 $\{\alpha_m\}$ 或是收敛, 或是发散于 $+\infty$. 无论哪种情况 $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m$ 都可确定, 故定义为

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \alpha_m.$$

当 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 时, 如果 $n > m$, 那么 $\alpha_m \leqslant a_n$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 除此之外, 下极限 $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\{a_n\}$ 是有界情况时的下极限具有同样的性质 (i) 和 (ii).

数列 $\{a_n\}$ 无下界但有上界时的上极限 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 也可同样定义.

例 1.2 设 α 是满足 $\alpha > 1$ 的实数, 并且 k 是自然数, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n^k} = +\infty.$$

[证明] 设 $a_n = \alpha^n / n^k$, 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = 1^k = 1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha \frac{n^k}{(n+1)^k} = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = \alpha > 1.$$

因此, 若 $n > n_0$, 则 $a_{n+1}/a_n > 1$, 即能确定使 $a_{n+1} > a_n$ 成立的自然数 n_0. 当 $n > n_0$ 时数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 因此 $\{a_n\}$ 或是发散于 $+\infty$, 或是收敛. 现假定数列 $\{a_n\}$ 收敛于 β, 则

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{\beta}{\beta} = 1.$$

这与 $\alpha > 1$ 相矛盾. 所以数列 $\{a_n\}$ 发散于 $+\infty$. □

此结果也可通过直接计算进行确认. 即设 $\alpha = 1 + \sigma$, $\sigma > 0$, 则根据二项式定理

$$\alpha^n = (1+\sigma)^n = 1 + \binom{n}{1}\sigma + \cdots + \binom{n}{k+1}\sigma^{k+1} + \cdots,$$

当 $n > 2k$ 时

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^n}{n^k} > \frac{1}{n^k}\binom{n}{k+1}\sigma^{k+1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)}{n^k(k+1)!}\sigma^{k+1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\sigma^{k+1}}{(k+1)!}(n-k) \\ &> \frac{\sigma^{k+1}}{2^{k-1}(k+1)!}(n-k).\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n/n^k = +\infty$.

d) 无穷级数

对给定的数列 $\{a_n\}$, 如下形式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

叫作**无穷级数**(infinite series), 或简称为**级数**(series), 把 a_n 称做其**第n项**(n-th term). 并且, 把这级数表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项之和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

叫做这个级数的**部分和**(partial sum). 这个部分和构成的数列 $\{s_n\}$ 收敛时, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**. 把 $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 叫作这个无穷级数的**和**(sum), 并记为

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

或

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

数列 $\{s_n\}$ 不收敛时, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**.

a_n 的各项是非负实数时, $\{s_n\}$ 是单调非减数列, 所以如果 $\{s_n\}$ 不收敛, 它就向正无穷发散. 此时就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散于 $+\infty$. 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

定理 1.21 如果以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项的绝对值 $|a_n|$ 作为项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明 若设 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, 则当 $m < n$ 时,

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = |\sigma_n - \sigma_m|,$$

所以根据 Cauchy 判别法, 若 $\{\sigma_n\}$ 收敛, 则 $\{s_n\}$ 也收敛. □

当 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛时, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **绝对收敛**(converge absolutely). 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 或是收敛于非负实数或是向 $+\infty$ 发散, 所以不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$$

蕴含着级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

定理 1.22 已知收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n, r_n\geqslant 0$. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 如果存在自然数 m, 使得当 $n\geqslant m$ 时, $|a_n|\leqslant r_n$ 成立, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

证明 假设 $n>m$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}|a_k|+\sum_{k=m}^{n}r_k\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}|a_k|+\sum_{n=1}^{\infty}r_n<+\infty.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$. □

用收敛性已知的标准级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n, r_n\geqslant 0$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 进行比较, 并根据定理 1.22 来验证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛性是很常用的方法. 作为标准级数常用的是等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^n, 0<r<1$.

幂级数 把 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 形式的级数叫作**幂级数**(power series), 或者叫作 x 的幂级数. 幂级数是最基本的级数.

例 1.3 考察 x 为任意实数的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$. 若 m 是 $m\geqslant 2|x|$ 的自然数, 则 $n\geqslant m$ 时

$$\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|x|^m}{m!}\cdot\frac{|x|}{m+1}\cdot\frac{|x|}{m+2}\cdots\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{2^m|x|^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

若 $M=2^m|x|^m/m!$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}M\left(\frac{1}{2}\right)^n=2M<+\infty.$$

因此, 根据定理 1.22, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 绝对收敛.

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ 的和用 e 表示:

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots. \tag{1.16}$$

e 是数学中最重要的常数之一, 其值为 e =2.718 28···.

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.17}$$

为证明此不等式, 若设 $e_n = (1 + 1/n)^n$, 根据二项式定理, 可得

$$e_n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}.$$

若设

$$a_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k},$$

即

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}.$$

因为

$$a_{n,k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

$$a_{n,k} < a_{n+1,k} < \frac{1}{k!},$$

所以

$$e_n < e_{n+1} < 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

于是 $\{e_n\}$ 是单调递增数列并且 $\lim_{n\to\infty} e_n \leqslant \mathrm{e}$. 另一方面, 因为 $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1/k!$, 对任意的 m,

$$\lim_{n\to\infty} e_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{m} a_{n,k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}.$$

因此 $\lim_{n\to\infty} e_n \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$. 所以 $\lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$, 即 (1.17) 式成立.

下面我们证明 e 是无理数. 假设 e=q/m, m, q 为自然数, 则 $m!$e 是整数, 又因为 $m!(1+1/1!+\cdots+1/m!)$ 也是整数, 所以根据 (1.16) 式 $m!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m+k)!}$ 也必是整数. 这与

$$m!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m+k)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}=\frac{1}{m}<1$$

相矛盾. 所以 e 是无理数.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 事实上, 因为 $s_n=a_1+a_2+\cdots a_n$, 若设 $s=\lim_{n\to\infty}s_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.$$

从而, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件, 当然它不是充分条件.

例 1.4 虽然 $\lim_{n\to\infty}1/n=0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 发散.

[证明] 对自然数 k, 取满足条件 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$ 的 2^k 个的关于自然数 n 的 $1/n$ 的和, 则

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{n}>\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

所以, 对于任意的自然数 m

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{n}>1+\frac{m}{2}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$. □

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 但不是绝对收敛时, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是**条件收敛**(converge conditionally). 正负项交错出现的级数叫做**交错级数**(alternating series).

定理 1.23 如果数列 $\{a_n\}$, $a_n>0$ 是收敛于 0 的单调递减数列, 则交错级数

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots$$

收敛. 如果其和设为 s, 部分和设为

$$s_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n,$$

则

$$s_{2n-1}>s>s_{2n}.$$

证明　因为

$$s_{2n-1}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1}),$$
$$s_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}),\ s_{2n-1}-s_{2n}=a_{2n},$$

所以

$$s_1>s_3>s_5>\cdots>s_{2n-1}>\cdots>s_{2n}>\cdots>s_4>s_2.$$

进一步, 当 $n\to\infty$ 时 $s_{2n-1}-s_{2n}=a_{2n}\to 0$, 所以数列 $\{s_{2n-1}\},\{s_{2n}\}$ 都收敛, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}$. 所以数列 $\{s_n\}$ 也收敛, 并且若 $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 则 $s_{2n-1}>s>s_{2n}$. □

例 1.5　$1-1/2+1/3-1/4+\cdots$ 收敛. 如例 1.4 所证, 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$ 发散, 所以这是条件收敛级数的一个例子.

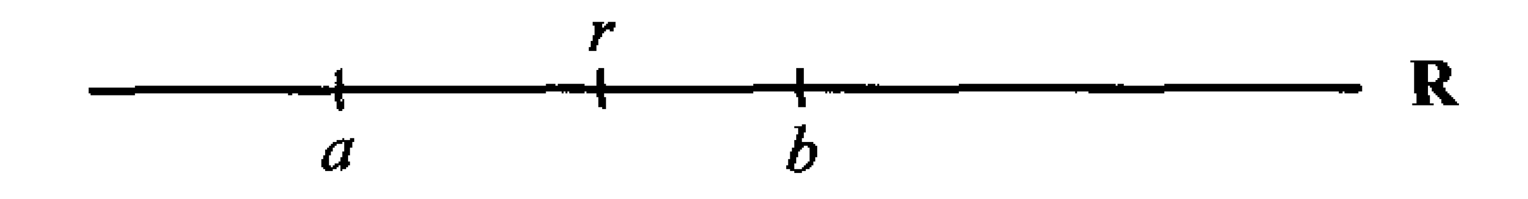
除交错级数外, 通常判断一个非绝对收敛级数是否是条件收敛是很困难的.

e) 区间

如我们在高中所学的, 对两个实数 $a,b,a<b$, 集合:

$$(a,b)=\{r\in\mathbf{R}|a<r<b\},$$
$$[a,b]=\{r\in\mathbf{R}|a\leqslant r\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{r\in\mathbf{R}|a\leqslant r<b\},$$
$$(a,b]=\{r\in\mathbf{R}|a<r\leqslant b\},$$

叫做**区间**(interval). 这里, 例如 $\{r\in\mathbf{R}\mid a<r<b\}$ 当然表示由满足不等式 $a<r<b$ 的全体实数 r 组成的集合, 这是显然的.



(a,b) 是数轴 $\mathbf{R}$ 上 "在 a 和 b 之间的点 r" 的全体集合. $[a,b)$ 是在 (a,b) 左端上添加点 a 后的集合, $[a,b]$ 是在 (a,b) 两端添加点 a 和 b 后的集合. (a,b) 叫做**开区间**(open interval), $[a,b]$ 叫做**闭区间**(closed interval). 这在高中数学中已经学过. 开区间和闭区间的区别很重要. 把 $b-a$ 叫做区间 (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ 的**幅度**或**长度**.

另外一些集合:

$$(a,+\infty)=\{r\in\mathbf{R}|a<r\},$$
$$[a,+\infty)=\{r\in\mathbf{R}|a\leqslant r\},$$
$$(-\infty,b)=\{r\in\mathbf{R}|r<b\},$$
$$(-\infty,b]=\{r\in\mathbf{R}|r\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$$

也叫做区间. 其中, 把 $(a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,+\infty)$ 叫做开区间.

闭区间套法

定理 1.24 闭区间列 $I_n=[a_n,b_n]$: $I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$, 如果满足以下两个条件 (i) 和 (ii), 则存在唯一的实数 c 属于所有这些闭区间 $[a_n,b_n]$:

(i) $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

证明 根据条件 (i)

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调非减, $\{b_n\}$ 单调非增, 并且都有界. 所以根据定理 1.20, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于其上确界 a, $\{b_n\}$ 收敛于其下确界 b. 因为 $a_n<b_n$,$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 所以根据定理 1.14, $a\leqslant b$, 又因为 a 是 $\{a_n\}$ 的上确界, b 是 $\{b_n\}$ 的下确界, 所以 $a_n\leqslant a, b\leqslant b_n$. 即

$$a_n\leqslant a\leqslant b\leqslant b_n.$$

因此

$$0\leqslant b-a\leqslant b_n-a_n,$$

根据条件 (ii), 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 所以 $b-a=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 即 $a=b$. 若设 $c=a=b$, 则

$$a_n\leqslant c\leqslant b_n,$$

即 c 属于所有的 I_n.

假设属于所有 I_n 的实数除了 c 之外, 还有一个 c', 则对于所有的 n

$$a_n\leqslant c'\leqslant b_n,$$

所以必有

$$a\leqslant c'\leqslant b,$$

即 $c'=a=b=c$. □

利用定理 1.24 证明实数 c 的存在叫做闭区间套法. 在定理 1.24 中, 最本质之处是I_n 为闭区间. 例如如果 I_n 是开区间, $I_n=(0,1/n)$, 则不存在属于所有 I_n 的实数.

f) 可数集合和不可数集合

设 S 是无限集合, 给 S 的全部元素加上号码, 如果能表示为

$$S=\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,\cdots\},$$

则称 S 是**可数的,或可添号码的**. 把 S 叫做**可数集合,** (countable set) **或可添号码集合**. 如果用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合, 则 $n \in \mathbf{N}$ 和 $s_n \in S$ 是一一对应的. 即 S 与 $\mathbf{N}$ 之间存在一一对应的关系时, 我们称 S 是可数集合. 把不是可数的无限集合叫做**不可数集合.**

可数集合的无限子集显然是可数集合. 有限集合和可数集合的并集明显是可数集合. 两个可数集合的并集也是可数集合. 这是因为

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots\},$$

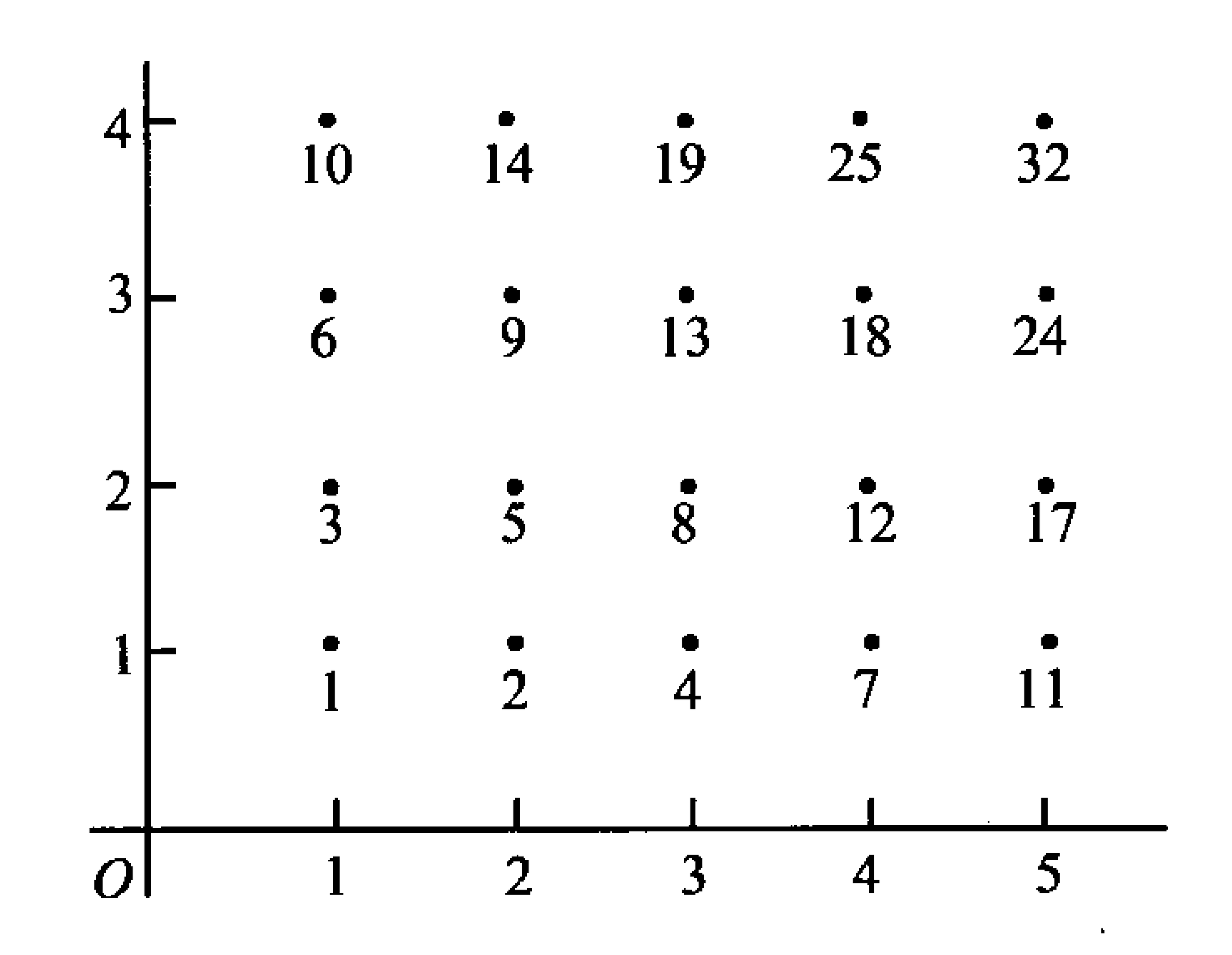
$$T = \{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n, \cdots\},$$

所以,

$$S \cup T = \{s_1, t_1, s_2, t_2, \cdots, s_n, t_n, \cdots\}.$$

因此根据定义结论显然成立.

对集合 S 与 T, S 的元素 s 与 T 的元素 t 组成的对 (s, t) 的全体集合称为 S 和 T 的**直积**(direct product), 或者称为**直积集合**, 记为 $S \times T$. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$是可数集合. 为了验证它, 我们把 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的元素 (j, k), 看成平面上坐标为 (j, k) 的点.



如上图所示, 添加号码. 则满足 $i + h < j + k$ 的点 $(j, h) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 的个数是

$$\frac{1}{2}(j + k - 2)(j + k - 1),$$

所以 (j, k) 的号码就是

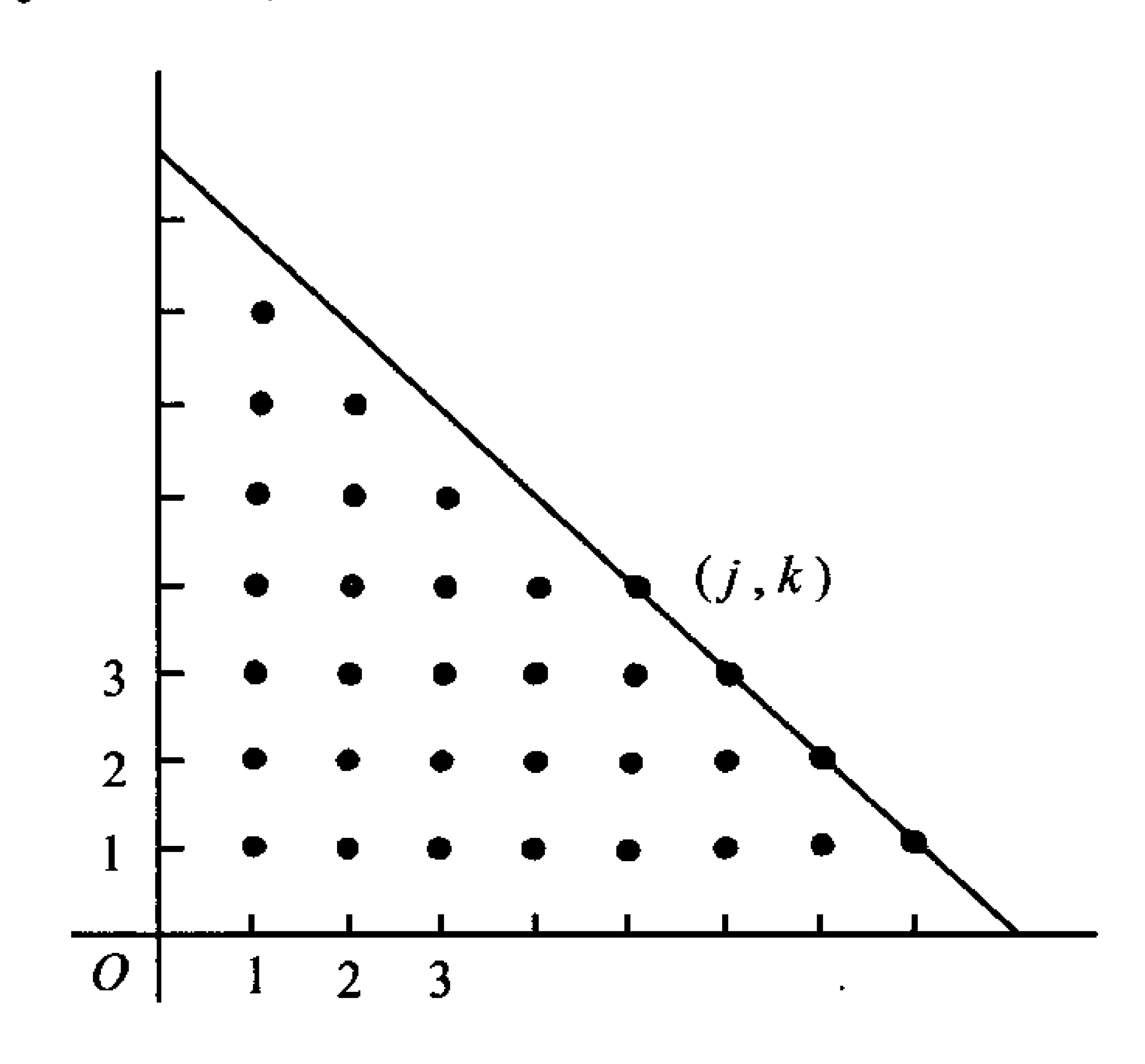
$$n = \frac{1}{2}(j + k - 2)(j + k - 1) + k.$$

当然

$$(j, k) \to n = \frac{1}{2}(j + k - 2)(j + k - 1) + k$$

给出 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}$ 之间的一一对应关系，这通过计算很容易验证. $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集合，蕴涵两个可数集合的直积是可数集合.

全体有理数集合$\mathbf{Q}$是可数集合.



[证明] 设 $\mathbf{Q}^+$ 是正有理数集合，$\mathbf{Q}^-$ 是负有理数集合，则

$$\mathbf{Q}=\{0\}\cup\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-,$$

并且 $r\to -r$ 给出了 $\mathbf{Q}^+$ 与 $\mathbf{Q}^-$ 之间的一一对应关系. 因此，要验证 $\mathbf{Q}$ 是可数集合，只须证明 $\mathbf{Q}^+$ 是可数集合即可. 正有理数 r 都可用不可约分数表示：$r=q/p$, p,q 互为素数. 设 P 是互素的自然数 p,q 组成的对 (p,q) 全体组成的 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的子集合. 如果让每个不可约分数 $r=q/p\in\mathbf{Q}^+$ 对应 $(p,q)\in P$，则在 $\mathbf{Q}^+$ 与 P 之间建立了一一对应关系. 因为 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集合，因此，$\mathbf{Q}^+$ 也是可数集合. □

对于任意实数$a,b,a<b$，满足条件 $a\leqslant\rho\leqslant b$的实数$\rho$的全体集合，即闭区间 $I=[a,b]$ 是不可数集合.

[证明] 如果 I 可数，即由

$$I=\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\cdots\rho_n,\cdots\}$$

可推得矛盾. 事实上，给定一个比 I 的长度 $b-a$ 小的正实数 ε，对每个 n，取 ρ_n 为长度为 $\varepsilon/2^n$ 的开区间的中点

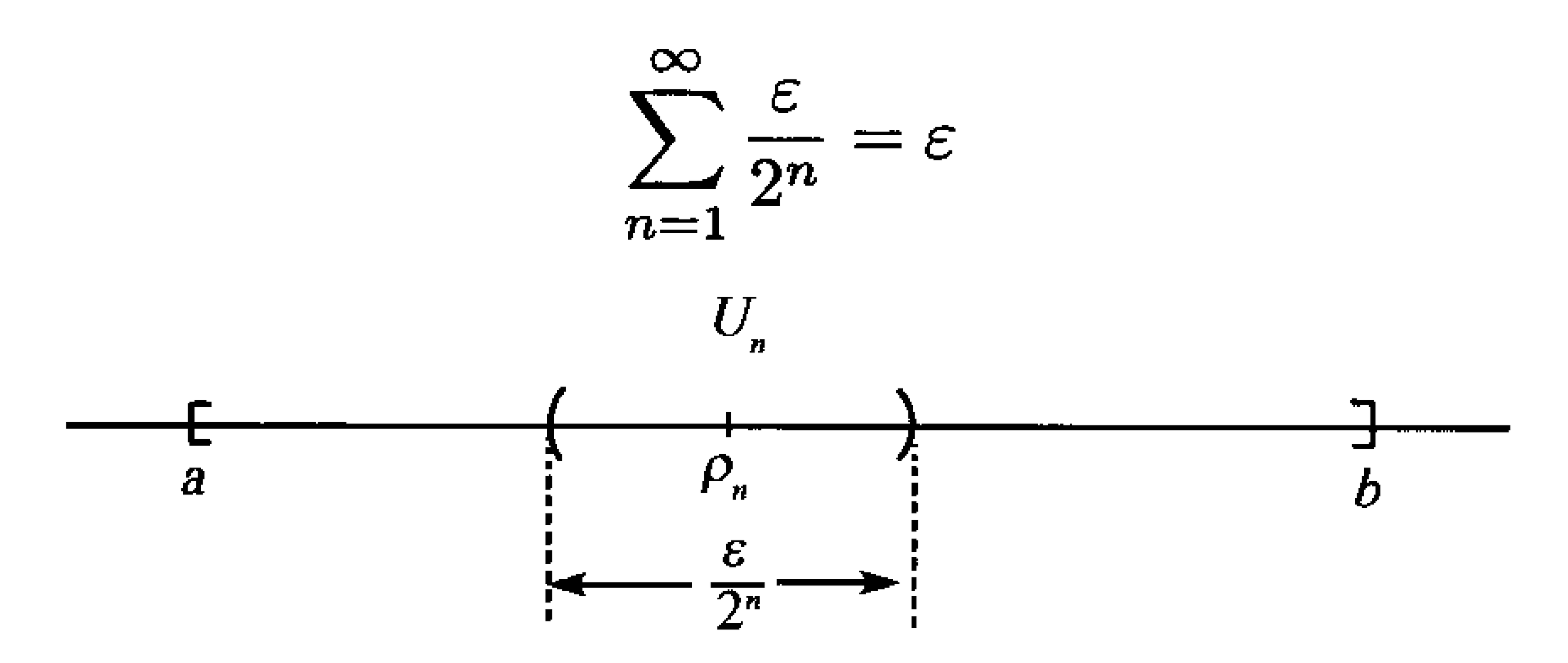
$$U_n=\left(\rho_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ \rho_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),$$

则 I 被 $U_1,U_2\cdots U_n,\cdots$ 覆盖：

$$I\subset U_1\cup U_2\cup U_3\cup\cdots\cup U_n\cup\cdots.$$

从而我们容易想象区间 U_n 的长度的总和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$



比 I 的长度 $b-a$ 小，从而相矛盾. 为了推出这一矛盾，首先运用闭区间套法证明，I 被有限个 U_n 所覆盖. 即

$$I \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_m$$

成立的自然数 m 存在. 为此，设

$$W_n = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n,$$

并且对于所有的 n, I 不包含于 W_n：假定 $I \not\subset W_n$. 区间 I 被其中点 $c=(a+b)/2$ 分割成两个区间：

$$I = [a,c] \cup [c,b].$$

a　　c　　b

若 $[a,c] \subset W_m, [c,b] \subset W_l$，若取 m 和 l 中大的一个为 n，则 $I \subset W_n$ 与假设矛盾. 所以两个区间 $[a,c],[c,b]$ 中至少有一个不被 W_n 包含. 不妨设这个区间是 $I_1=[a_1,b_1]$，则

$$I_1 \subset I, \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a),$$

并且对所有的 n, $\quad I_1 \not\subset W_n$. 若相同的讨论也适用于 I_1，则

$$I_2 = [a_2,b_2] \subset I_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1-a_1) = \frac{1}{2^2}(b-a),$$

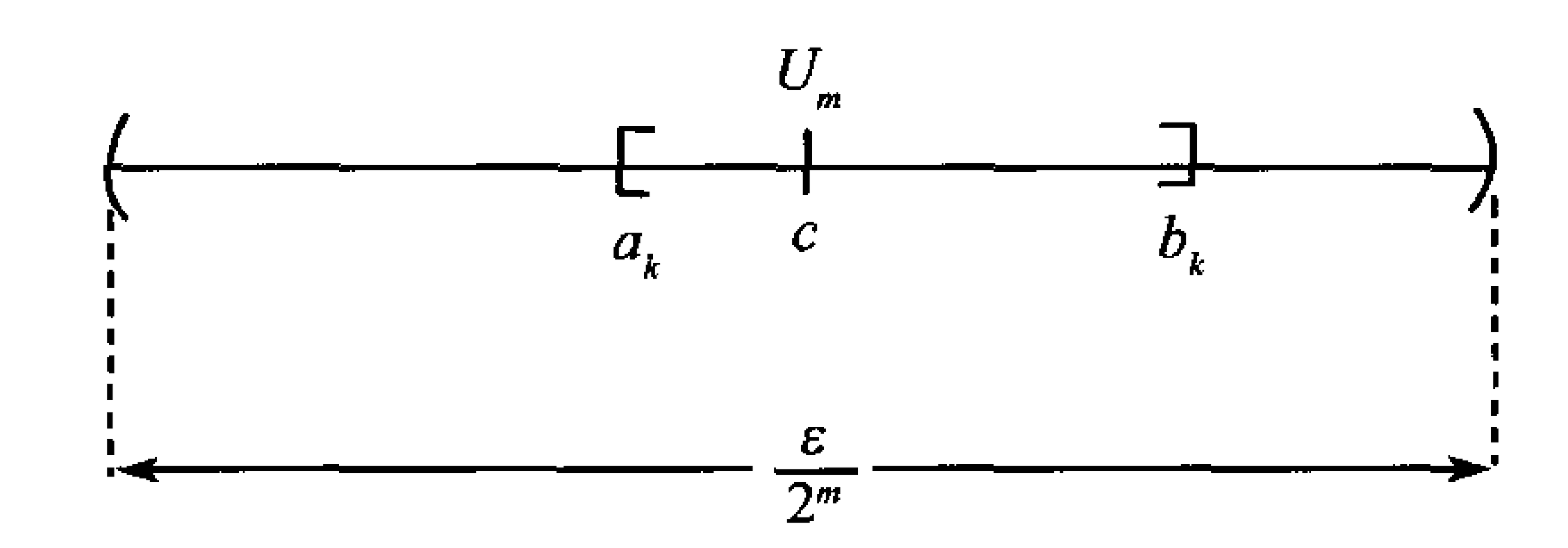
并且对所有的 n，可得满足 $I_2 \not\subset W_n$ 的闭区间 I_2. 重复相同的过程，对所有的 n，可得满足 $I_k \not\subset W_n$ 的闭区间

$$I_k = [a_k,b_k], \quad b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$$

的列 $I_1, I_2, \cdots, I_k, \cdots$，并且

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots.$$

因此, $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=0$, 所以根据闭区间套法, 对所有的 k, 存在实数 $c\in I_k$. 因为 $c\in I$, c 和 ρ_n 中的某一个一致, $c=\rho_m$, 即 c 属于长度为 $\varepsilon/2^m$ 的开区间. 因此



$c\in I_k=[a_k,b_k]$, $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=0$, 从而只要 k 充分大, 就有 $I_k\subset U_m\subset W_m$. 这与对所有的 $n, I_k\not\subset W_n$ 相矛盾.

于是, 对所有的自然数 m,

$$I\subset W_m=U_1\cup U_2\cup U_3\cup\cdots\cup U_m.$$

所以 I 的长度比 $U_1,U_2,\cdots,U_m$ 的长度的总和小:

$$b-a<\sum_{n=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^n}<\varepsilon.$$

这与 $\varepsilon<b-a$ 相矛盾. □

上面证明的最后阶段中, 一般地, 如果闭区间 $I=[a,b]$ 用有限个开区间 $U_n=(u_n,v_n), n=1,2,\cdots,m$ 覆盖, 则

$$b-a<\sum_{n=1}^{m}(v_n-u_n),$$

这是显然的. 但为慎重起见, 我们给出开区间的个数是 m 时的归纳法证明. 假设 I 被 $m-1$ 个开区间覆盖时结论成立. 因为 b 属于 U_n 中的某一个, 适当地替换 $U_1,U_2,\cdots,U_m$ 的号码, 使得 $b\in U_m$. 此时, 如果 $u_m\leqslant a$, 那么, 显然

$$b-a<v_m-u_m\leqslant\sum_{n=1}^{m}(v_n-u_n).$$

当 $u_m>a$ 时, 从 I 中除去用 U_m 覆盖的部分,

剩下的是闭区间 $[a,u_m]$. 并且因为 $[a,u_m]$ 被 U_n $(n=1,2,\cdots,m-1)$ 覆盖, 所以根据归纳假设

$$u_m-a<\sum_{n=1}^{m-1}(v_n-u_n).$$

所以

$$b-a=u_m-a+b-u_m\sum_{n=1}^{m-1}(v_n-u_n)+v_m-u_m,$$

即

$$b-a<\sum_{n=1}^{m}(v_n-u_n).$$

至此, 我们证明了所有闭区间 $[a,b], a<b$ 都是不可数集合. 因为开区间 $(a,b), a<b$ 也把闭区间作为它的子集而包含它, 所以它是不可数集合. 实数全体集合 $\mathbf{R}$ 当然也是不可数集合. 所谓集合 S 可数, 是指从 S 中把其元素按适当的次序取出并添加号码表示为 $s_1, s_2, s_3, \cdots$, 使得给 S 的全部元素都标上号码, 即

$$S=\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,\cdots\}.$$

S 为不可数集合时, 不论从 S 中按照什么顺序取它的元素 $s_1, s_2, s_3, \cdots$, 被取出元素全体的集合:

$$\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,\cdots\}$$

中, 都仍有属于 s 的元素没有被取到. 可数集合与不可数集合都是由无数个元素组成. 但不可数集合比可数集合包含更多个元素.

因为有理数全体集合 $\mathbf{Q}$ 可数, 所以可表示为

$$\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n,\cdots\}.$$

另一方面, $\mathbf{Q}$ 在数轴 $\mathbf{R}$ 上处处稠密. 即在 $\mathbf{R}$ 上无论取什么样的区间 $(c,d), c<d$, 属于 (c,d) 的有理数有无数个. 现在对各有理数 r_n, 取 $\mathbf{R}$ 上包含 r_n 的开区间 $U_n=(u_n,v_n), u_n<r_n<v_n$, 若

$$W=U_1\cup U_2\cup U_3\cup\cdots\cup U_n\cup\cdots,$$

则由 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的稠密性, 我们可能会认为 W 覆盖 $\mathbf{R}$ 全体, 但事实并非如此. 取一个正实数 ε, 取以 r_n 为中点、长度为 $\varepsilon/2^n$ 的开区间 U_n, 则根据与上述闭区间是不可数集合的证明相同的讨论. 在 $\mathbf{R}$ 上取满足条件 $b-a>\varepsilon$ 的任何闭区间 $[a,b]$, 都有

$$[a,b]\not\subset W.$$

开区间 U_n 的长度的总和 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon$, 它不仅仅拘泥于 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的稠密性, 可以看作 $\mathbf{Q}$ 不过仅占 $\mathbf{R}$ 上的极小一部分.

g) 对角线法

例如要验证区间 $(0,1)$ 是不可数集合, 一般采用如下的证明. 设 $(0,1)$ 是可数集合, 即

$$(0,1)=\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\cdots,\rho_n,\cdots\},$$

并且令 $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\cdots,\rho_n,\cdots$ 的十进制小数表示是

$$\begin{aligned}\rho_1 &=0.k_{11}k_{12}k_{13}\cdots k_{1m}\cdots\\ \rho_2 &=0.k_{21}k_{22}k_{23}\cdots k_{2m}\cdots\\ \rho_3 &=0.k_{31}k_{32}k_{33}\cdots k_{3m}\cdots\\ &\cdots\\ \rho_n &=0.k_{n1}k_{n2}k_{n3}\cdots k_{nm}\cdots\\ &\cdots\end{aligned}$$

这里出现的数字 k_{nm} 中, 我们关注"对角线上排列"的数字 $k_{11},k_{22},k_{33},\cdots,k_{nn},\cdots$, 对于任意的 n, 任选

$$k_n\neq k_{nn},\quad 1\leqslant k_n\leqslant\delta$$

的数字 k_n, 并设

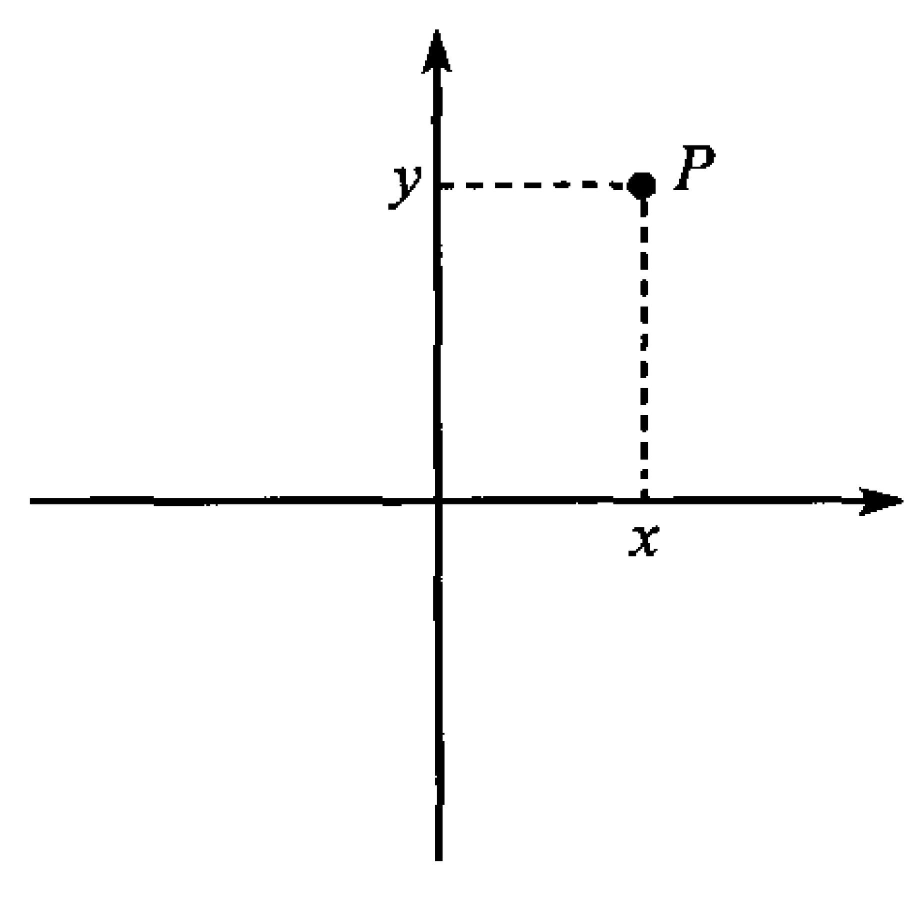
$$\rho=0.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots,$$

则因为 $1\leqslant k_n\leqslant 8$, 所以实数 ρ 的十进制小数仅此一个. 又因为 ρ 属于区间 $(0,1)$, 所以它应与 ρ_n 中的某一个一致. 若 $\rho=\rho_n$, 则必有 $k_n=k_{nn}$ 成立. 这与 $k_n\neq k_{nn}$ 相矛盾. 所以 $(0,1)$ 不可数. □

把这个证明方法叫做 Cantor **对角线法**. 对角线法在集合论中是最基本的.

1.6 平面上点的集合

如在初中数学中所讲, 如果在平面上给定一个坐标系, 则平面上的点 P 可以用 P 的坐标 (x,y) 来表示. 这里 x,y 都是实数. 若用上一节所述的表示直积的符号 $\times$ 来表示, 则两个实数 x,y 的对 (x,y) 的全体集合就是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. 因此若把平面上各点 P 与其坐标 (x,y) 视为同一, 则平面上的所有点的集合与直积集合 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 是一致的.



若把平面看成它上面全体点的集合, 则平面就是直积集合 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. 可是, 直到高中数学我们还没有对平面进行严格的定义. 最初就把它作为我们原本就了解的

东西, 通过对纸上描绘的图形观察, 以培养起来的平面图形的感观印象为基础, 导入平面上点的坐标的概念, 然后说明了平面是直积集合 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

在本节, 我们将采用相反的过程, 首先定义平面是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, 然后阐述平面上点的集合的基本性质. 这些性质是从理论上把平面看作 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 而严密推出的. 为了掌握其含义, 必须通过画图对其印象有一个直观的把握.

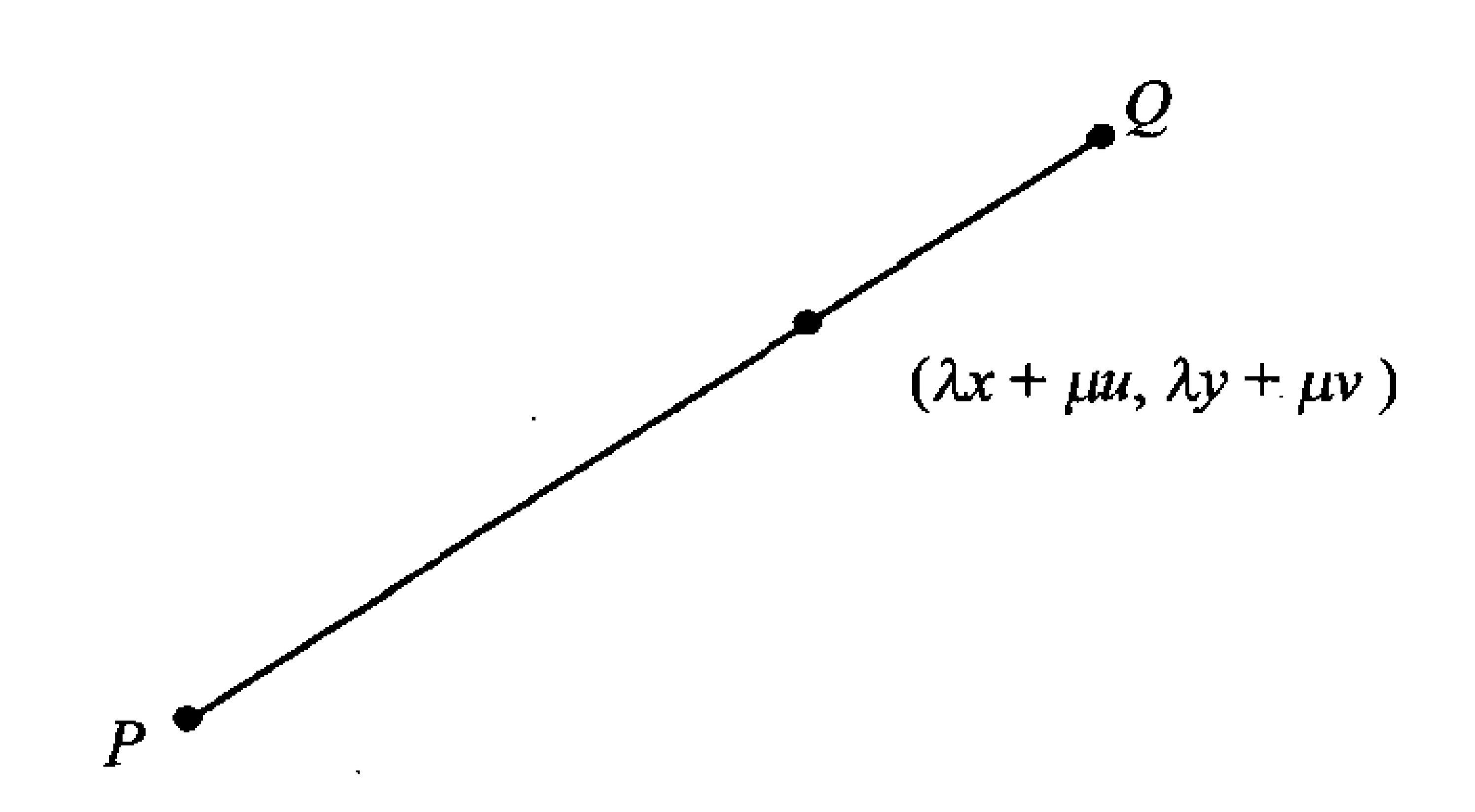
a) 平面

直积集合 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 称为**平面**, 其元素 $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 称为平面上的点. 用 $\mathbf{R}^2$ 来表示平面 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. 在以下的论述中, 因为在给定平面 $\mathbf{R}^2$ 上考虑其上的点, 如果不加特殊说明, 点就是指平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点.

对于两个点 $P=(x,y), Q=(u,v)$, 把 $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$ 叫做两点 P 与 Q 之间的**距离** (distance), 并记为 $|PQ|$:

$$|PQ|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}. \tag{1.18}$$

当 $P\neq Q$ 时, 把点 $(\lambda x+(1-\lambda)u, \lambda y+(1-\lambda)v), \lambda\in[0,1]$ 的全体集合叫做连接 P 与 Q 的**线段**, 用 PQ 表示. 若 $\mu=1-\lambda$, 即



$$PQ=\{(\lambda x+\mu u, \lambda y+\mu v)|\mu=1-\lambda, \lambda\in[0,1]\}. \tag{1.19}$$

把 $|PQ|$ 叫做线段 PQ 的**长度**①.

在高中数学中, (1.18) 和 (1.19) 是定理, 但从平面定义为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的立场上来看, (1.18) 和 (1.19) 是定义. 当然, 在高中数学中学过的事实构成了定义 (1.18) 和 (1.19) 的背景. 但如果我们不知道这一事实, 就不能理解为什么距离和线段要用 (1.18) 和 (1.19) 来定义. 以我们在高中数学中学过的事实为背景, 不仅是线段, 还有直线、圆周、正方形等各种图形, 从我们的角度如何来定义好它们, 自然是显而易见的事.

对于两点 $P=(x,y), Q=(u,v), P\neq Q$,

$$l=\{(\lambda x+\mu u, \lambda y+\mu v)|\mu=1-\lambda, \lambda\in\mathbf{R}\}$$

叫做过两点 P,Q 的**直线**.

① 在高中数学里, 线段和其长度同用记号 PQ 表示, 但在这里, 线段用 PQ 表示, 其长度用 $|PQ|$ 表示.

已知点 P 和正实数 r, 与 P 的距离为 r 的点 Q 的全体集合

$$\{Q||QP|=r\}$$

叫做以 P 为圆心、r 为半径的**圆周**.

关于距离, 仅当 $P=Q$ 时, $|PQ|=0$, 这是显然的. 对于任意三点 P,Q,R, 不等式:

$$|PR|\leqslant|PQ|+|QR| \tag{1.20}$$

成立, 并称它为**三角不等式**(triangle inequality). 这个不等式可以通过简单的计算证明. 即设 $P=(x,y),Q=(s,t),R=(u,v)$. 若

$$\xi=x-s,\quad \eta=y-t,\quad \sigma=s-u,\quad \tau=t-v,$$

则不等式 (1.20) 可以写成

$$\sqrt{(\xi+\sigma)^2+(\eta+\tau)^2}\leqslant\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\sqrt{\sigma^2+\tau^2}.$$

一般地, 当 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$ 时, 由 $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ 易知, 若 $\alpha^2\leqslant\beta^2$ 则 $\alpha\leqslant\beta$. 所以要证明这个不等式, 只须证明两边平方后所得不等式:

$$(\xi+\sigma)^2+(\eta+\tau)^2\leqslant\xi^2+\eta^2+2\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\sigma^2+\tau^2}+\sigma^2+\tau^2,$$

即证明

$$\xi\sigma+\eta\tau\leqslant\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\sigma^2+\tau^2}$$

即可. 为此, 只须说明

$$(\xi\sigma+\eta\tau)^2\leqslant(\xi^2+\eta^2)(\sigma^2+\tau^2)$$

即可, 这由

$$(\xi^2+\eta^2)(\sigma^2+\tau^2)-(\xi\sigma+\eta\tau)^2=(\xi\tau-\eta\sigma)^2\geqslant0$$

显然.

以后三角不等式 (1.20) 可以自由放心地使用.

设 P 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一点, ε 是正实数, $|PQ|<\varepsilon$ 的点 $Q\in\mathbf{R}^2$ 的全体组成的集合叫做 P 的 **ε 邻域** (ε-neighborhood). 用 $U_\varepsilon(P)$ 表示为:

$$U_\varepsilon(P)=\{Q\in\mathbf{R}^2||QP|<\varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(P)$ 是以 P 为中心、ε 为半径的圆的内部.

b) 内点、边界点和聚点

设 S 是点集合, 即 $\mathbf{R}^2$ 的子集, P 是 $\mathbf{R}^2$ 上的点. 这里, "点集合" 意味着 "点的集合".

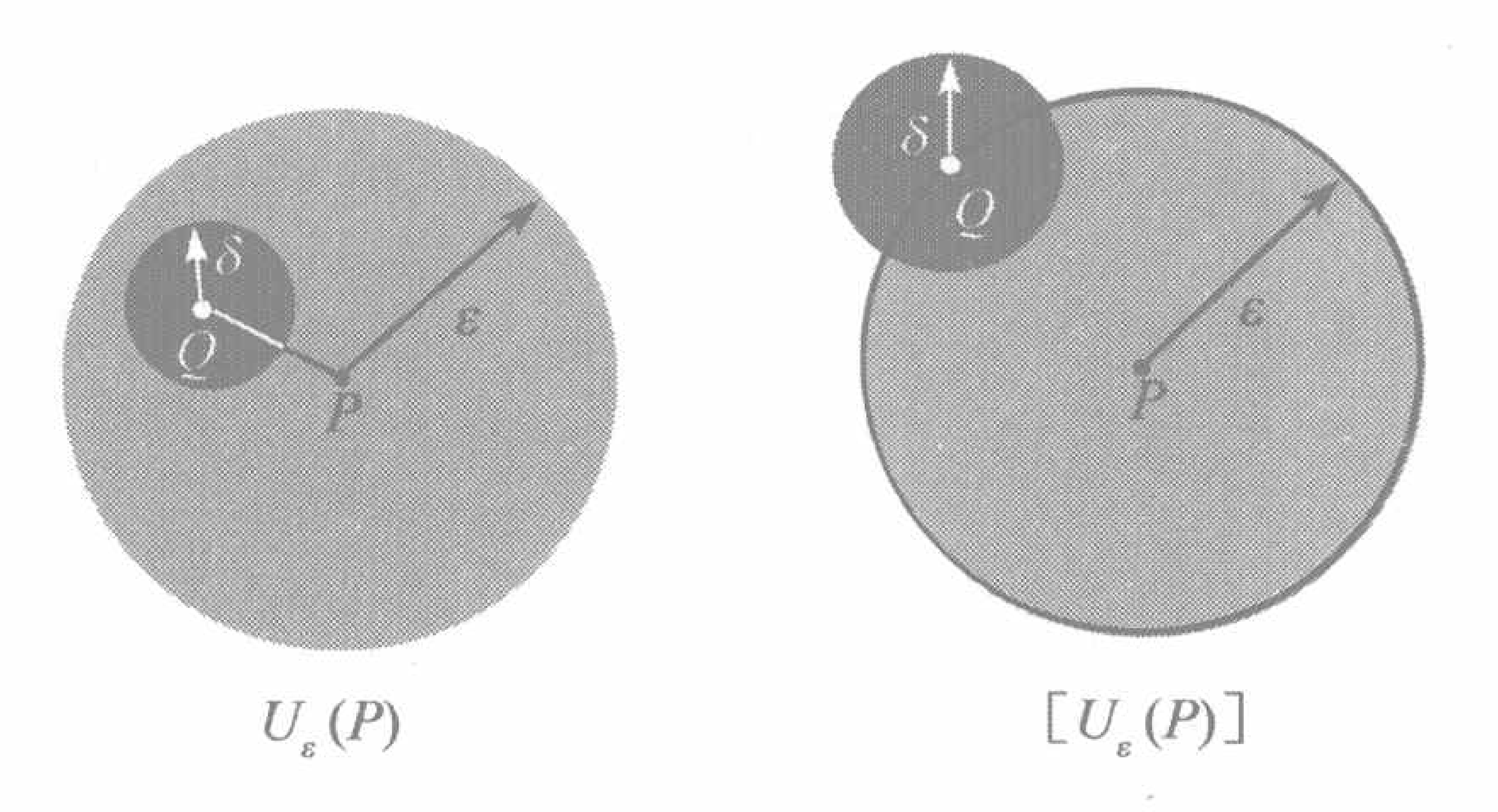
若存在正实数 ε, 使 $U_\varepsilon(P) \subset S$ 成立, 则 P 叫做 S 的**内点**(inner point). 因为 $P \in U_\varepsilon(P)$, 所以 S 的内点全部属于 S.

对任意的正实数 ε, 当 $U_\varepsilon(P) \not\subset S, U_\varepsilon(P) \cap S \neq \varnothing$ 时, 把 P 叫做 S 的**边界点**(boundary point). 且 S 的全体边界点的集合叫做 S 的**边界**(boundary). S 和 S 的边界的并集叫做 S 的**闭包**(closure), 记为 $[S]$①. 显然, 点 Q 属于 $[S]$ 的充分必要条件是对任意的正实数 ε, $U_\varepsilon(Q) \cap S \neq \varnothing$(空集). 所以若 $T \subset S$, 则 $[T] \subset [S]$.

例如, 对于 $S = U_\varepsilon(P)$, 对所有的正实数 δ, $U_\delta(Q) \cap U_\varepsilon(P) \neq \varnothing$ 的充分必要条件是 $|QP| \leqslant \varepsilon$.② 所以, $[U_\varepsilon(P)]$ 是以 P 为中心、ε 为半径的闭圆盘:

$$[U_\varepsilon(P)] = \{Q \mid |QP| \leqslant \varepsilon\}.$$

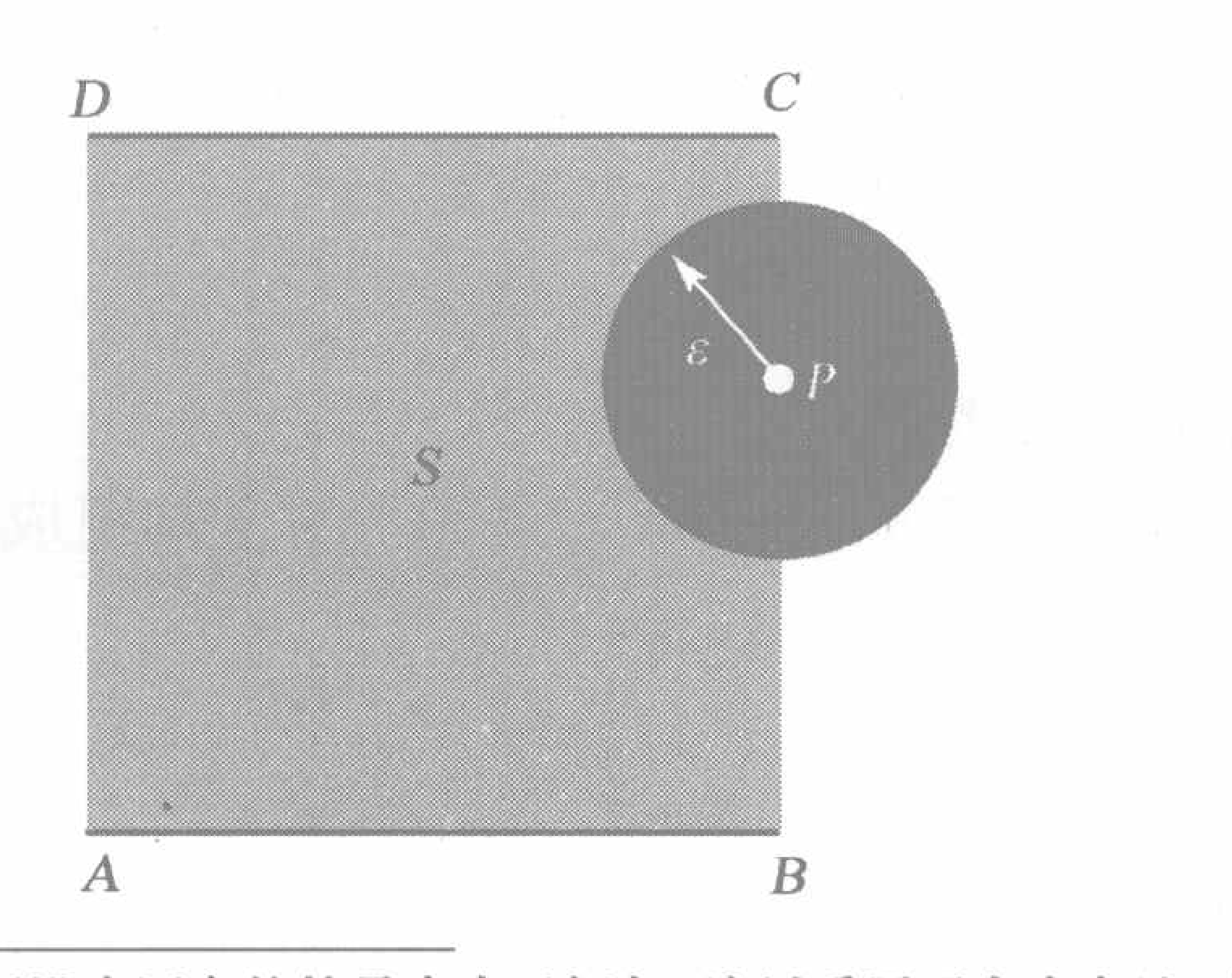
如果 $Q \in U_\varepsilon(P)$, 那么 $|QP| \leqslant \varepsilon$, 所以对满足 $\delta \leqslant \varepsilon - |QP|$ 的正实数 δ,

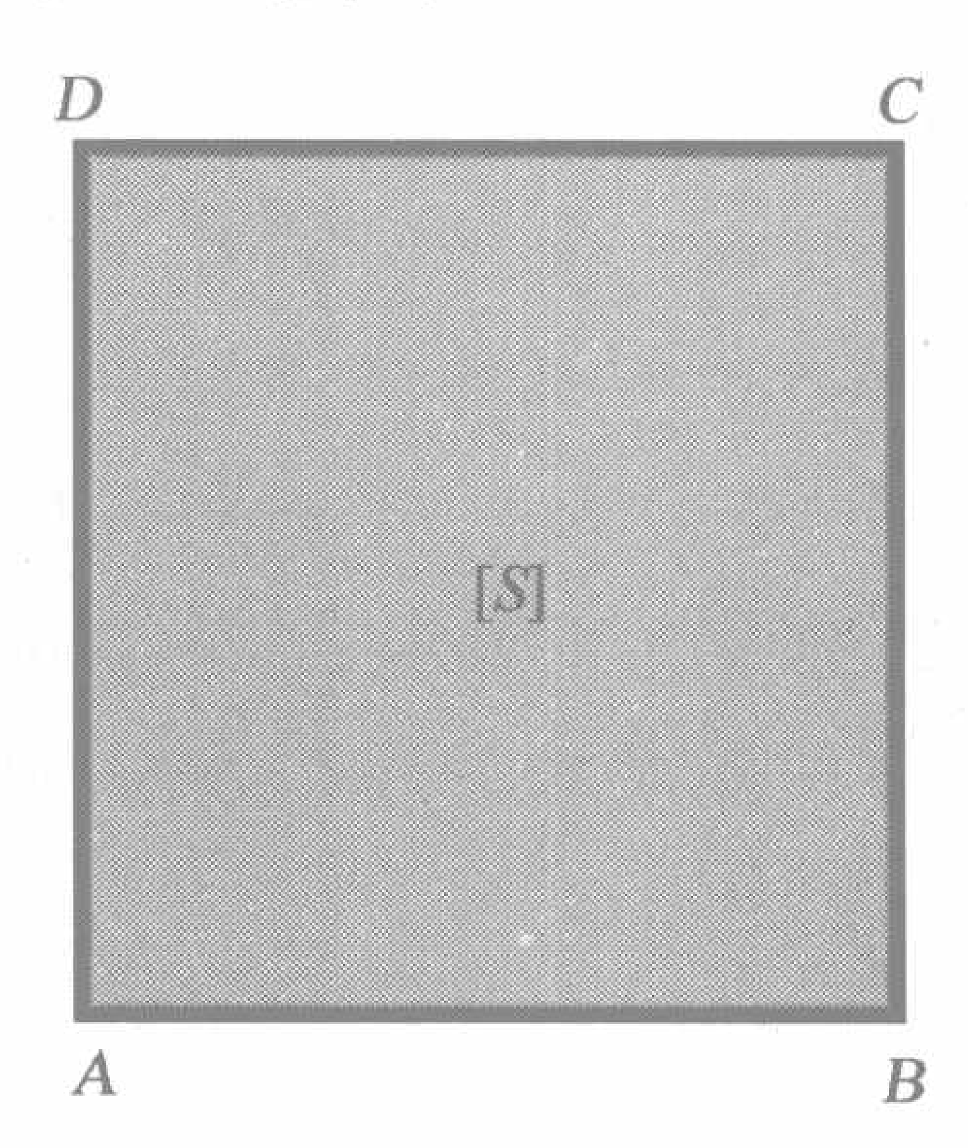


$U_\varepsilon(P)$ $[U_\varepsilon(P)]$

$U_\delta(Q) \subset U_\varepsilon(P)$ 成立, 因此, Q 是 $U_\varepsilon(P)$ 的内点. 故 $U_\varepsilon(P)$ 的边界是以 P 为中心、ε 为半径的圆周. 以上的论证是基于三角不等式的.

例 1.6 设 $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}, A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1), D = (0, 1)$, S 的边界是 4 个线段 AB, BC, CD, DA 的并集: $AB \cup BC \cup CD \cup DA$.





① 还没有固定的符号来表示闭包, 这里采用了高木贞治《解析概論》的记法.

② $|PQ| = \varepsilon$ 时, 线段 PQ 上存在属于 $U_\delta(Q) \cap U_\varepsilon(P)$ 的点.

DA 或 BC 上的点是 S 的边界点, 但不属于 S. S 的闭包是正方形:

$$ABCD = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

又 S 的内点只能是正方形内部的点.

例 1.7 设 S 是线段 PQ. S 没有内点, S 的边界与 S 一致. 因此 $[S] = S$.

例 1.8 设 $S = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{R}^2$ 的全部的点都是 S 的边界点. 因此, S 没有内点, $[S] = \mathbf{R}^2$.

设 S 是点集合, T 是 S 的子集, 如果 $[T] \supset S$, 那么, T 在 S 中**稠密**(dense), 或者说 T 在 S 中处处稠密. 例 1.8 的集合 S 在 $\mathbf{R}^2$ 中**稠密**.

若对所有的正实数 ε, 都存在 $U_\varepsilon(P)$ 包含 S 的无数个点, 即 $U_\varepsilon(P) \cap S$ 为无限集合, 就把 P 叫做 S 的**聚点**(accuumulating point). 明显地, S 的内点都是 S 的聚点. S 的聚点是 S 的内点或 S 的边界点. 这也是显然的. 如果 S 的边界点 P 不属于 S, 那么 P 是 S 的聚点.

[证明] 假设 P 不是 S 的聚点, 则对于某个正实数 ε, $U_\varepsilon(P) \cap S$ 是有限集合:

$$U_\varepsilon(P) \cap S = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, \cdots, Q_n\}.$$

此时, 因为 $Q_k \in S, P \notin S$, 所以 $Q_k \neq P$. 因此 $0 < |Q_k P| < \varepsilon$.

故, 存在满足

$$\delta < |Q_k P| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

的正实数 δ. 如果给定这样的 δ, 则

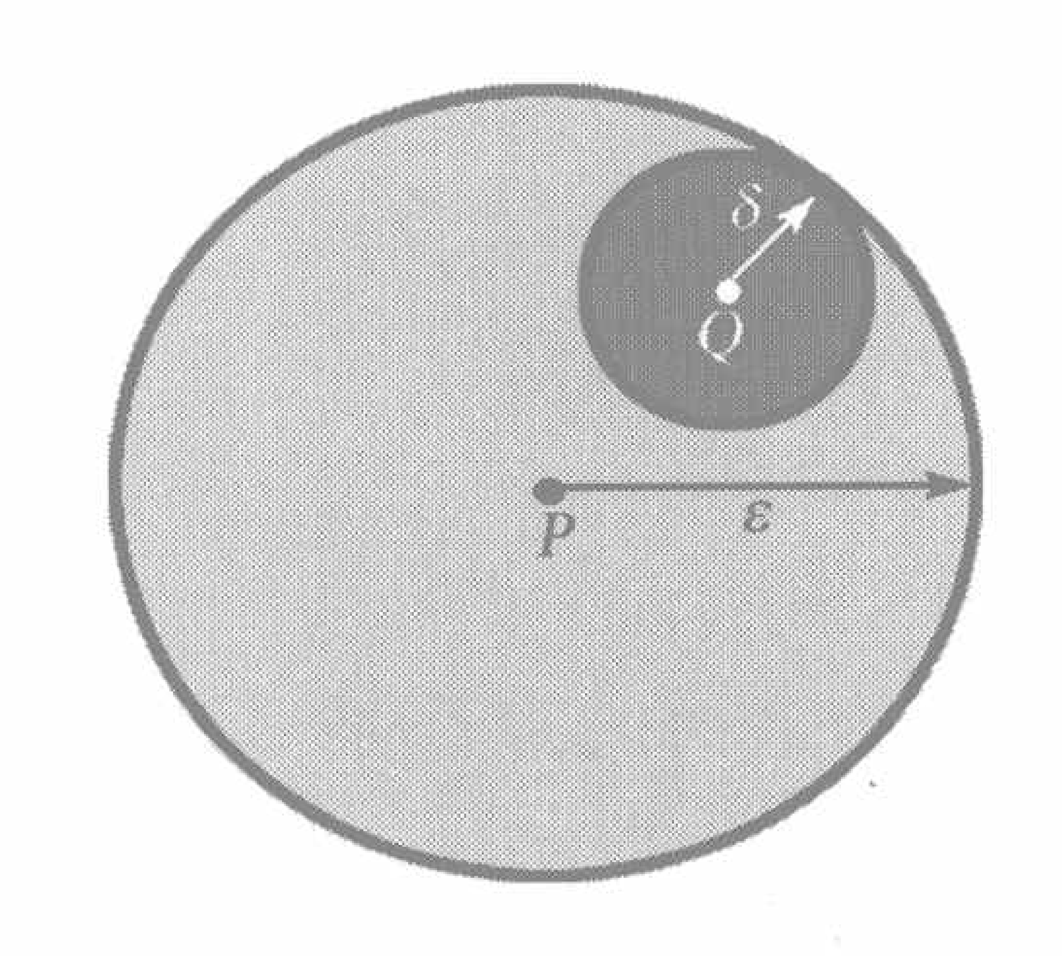
$$U_\delta(P) \cap S \subset U_\varepsilon(P) \cap S,$$

并且 $U_\delta(P)$ 不包 Q_k. 所以, $U_\delta(P) \cap S$ 必是空集, 但这与 P 是 S 的边界点相矛盾.□

属于 S 的点 P 不是 S 的聚点时, P 叫做 S 的**孤立点**(isolated point). P 是 S 的孤立点的充分必要条件是存在正实数 ε, 使得 $U_\varepsilon(P) \cap S = \{P\}$ 成立. S 所有点都是 S 的孤立点时, S 叫做**离散集合**(discrete set).

c) 开集和闭集

属于集合 $S \subset \mathbf{R}^2$ 的点如果都是 S 的内点, 则 S 叫做**开集**(open set). 例如 ε 邻域 $U_\varepsilon(P)$ 是开集. 包含点 P 的任意开集叫做 P 的**邻域**. S 的边界点都被 S 包含时, S 叫做**闭集**(closed set). 即 $[S] = S$ 时, S 叫做闭集. 因为不属于 S 的 S 的边界点是 S 的聚点, 所以 S 是闭集的充分必要条件是 S 的聚点都属于 S. $\varnothing$ 和 $\mathbf{R}^2$ 既是开集又是闭集.



任意的点集合 S 的闭包 $[S]$ 是闭集.

[证明] 只须说明 $[S]$ 的边界点 P 是 S 的边界点即可. 为此只须证明, 对任意的正实数 ε, $U_\varepsilon(P)\cap S$ 不是空集. 因为 P 是 $[S]$ 的边界点, 所以 $U_\varepsilon(P)$ 包含属于 $[S]$ 的点 Q. 此时, 若 $\delta=\varepsilon-|QP|$, 则 $\delta>0, U_\delta(Q)\subset U_\varepsilon(P)$. 因为 Q 属于 $[S]$, 所以 $U_\delta(Q)\cap S$ 不是空集. 因此, $U_\varepsilon(P)\cap S$ 也不是空集. □

设 S 既不是 $\varnothing$ 也不是 $\mathbf{R}^2$ 的点集合, S' 是 S 在 $\mathbf{R}^2$ 中的补集. P 是 S 的边界点的充分必要条件是, 对所有的正实数 ε, 因为 $U_\varepsilon(P)\cap S\neq\varnothing$, $U_\varepsilon(P)\cap S'\neq\varnothing$, 所以 S 的边界是 S' 的边界. 因此, 若 S 是开集, 则 S' 的边界被 S' 包含. 故如果 S 是开集, 那么 S' 是闭集. 如果 S 是闭集, 那么 S' 不包含其边界点. 所以, 若 S 是闭集, 则 S' 是开集.

几个 (有限个或无数个) 闭集的公共部分 (交集, intersection) 是闭集.

[证明] 设 $\mathcal{U}$ 是几个闭集 S 的集合, 这些闭集 S 的交集是 $T=\bigcap\limits_{S\in\mathcal{U}}S$. 一般地, 若 $T\subset S$, 则 $[T]\subset[S]$. 所以

$$[T]\subset\bigcap_{S\in\mathcal{U}}[S]=\bigcap_{S\in\mathcal{U}}S=T.$$

因此 $[T]=T$, 即 T 是闭集. □

几个开集的并集是开集.

[证明] 设 $\mathcal{U}$ 是几个开集 U 的集合, 这些开集 U 的并集设为 $W=\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}}U$. 因为 U 的补集 U' 是闭集, 所以根据上述结果, W 的补集 $W'=\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}}U'$ 也为闭集. 所以 W 是开集. □

有限个开集的交集是开集.

[证明] 设 $U_1, U_2,\cdots,U_n$ 是开集, $U=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n$. 如果任取 $P\in U$, 因为 $P\in U_k$, 所以存在正实数 ε_k 使得 P 的 ε_k 邻域 $U_{\varepsilon_k}(P)$ 包含于 U_k: $U_{\varepsilon_k}(P)\subset U_k$. 若取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的最小值 ε, 则 $U_\varepsilon(P)$ 包含于所有的 U_k. 所以, $U_\varepsilon(P)\subset U$, 即 P 是 U 的内点. 因此 U 是开集. □

有限个闭集的并集是闭集.

[证明] 设 $S_1,S_2,\cdots, S_n$ 是闭集, 若 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$, 则 S_k' 是开集. 因此, $S'=S_1'\cap S_2'\cap\cdots\cap S_n'$ 是开集, 所以, S 是闭集. □

d) 点列的极限

如 $P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$ 这样把点 $P_n\in\mathbf{R}^2$ 排成一列叫做**点列**, 并用 $\{P_n\}$ 表示. 其中的每点 P_n 叫做点列 $\{P_n\}$ 的项.

存在点 A, 当

$$\lim_{n\to\infty}|P_nA|=0$$

时, 称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 A, 也称 A 是点列 $\{P_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty}P_n=A.$$

又当 $\{P_n\}$ 收敛于某一点时, 点列 $\{P_n\}$ 叫做收敛.

设 $P_n=(x_n,y_n), A=(a,b)$, 因为

$$|P_nA|=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|P_nA|=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=\lim\limits_{n\to\infty}|y_n-b|=0$ 等价, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 等价. 另外, 点列 $\{P_n\}$ 收敛于 A 的充分必要条件是对任意给定的正实数 ε, 除了有限个 n 外, $P_n\in U_\varepsilon(A)$. 因此, 如果收敛点列 $\{P_n\}$ 的各项 P_n 属于 S, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ 包含于 S 的闭包 $[S]$.

定理 1.25 (Cauchy 判别法) 点列 $\{P_n\}$ 收敛的充分必要条件是对任意正实数 ε, 存在与 ε 相关的自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得当 $n>n_0(\varepsilon)$, $m>n_0(\varepsilon)$ 时, $|P_nP_m|<\varepsilon$ 成立.

证明 设 $P_n=(x_n,y_n)$, 则如上所述, 点列 $\{P_n\}$ 收敛与数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 同时收敛等价. 另一方面, 因为

$$|P_nP_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2},$$

所以, 只要 $|P_nP_m|<\varepsilon$, 就有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$, $|y_n-y_m|<\varepsilon$ 成立. 如果 $|x_n-x_m|<\varepsilon$, $|y_n-y_m|<\varepsilon$, 那么 $|P_nP_m|<\sqrt{2}\varepsilon$. 所以, 由数列的 Cauchy 判别法 (定理 1.13), 定理 1.25 成立. □

P 是 S 的聚点的充分必要条件是存在点列 $\{P_n\}$ 满足: $P_n\in S, P_n\neq P, \lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$. 为证明这个结论, 首先令 P 是 S 的聚点. 则对每个自然数 $n, U_{1/n}(P)\cap S$ 是无限集合, 所以可以选出一点 P_n, 使得 $P_n\in U_{1/n}(P)\cap S$, $P_n\neq P$ 成立. 显然, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$. 反之, 如果存在点列 $\{P_n\}$, 使得 $P_n\in S, P_n\neq P$, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$, 则对任意给定的正实数 ε, 除了有限个 n 外, 有 $P_n\in U_\varepsilon(P)$. 又因为 $P_n\neq P$, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$, 所以在这些 P_n 中, 有无数个互异的点. 因此 $U_\varepsilon(P)\cap S$ 是无限集合, 所以 P 是 S 的聚点.

e) 有界集合

如果属于 S 的点 P 与原点 $O=(0, 0)$ 的距离 $|PO|$ 有上界, 即不超过一定的正实数 μ 时, 称 S **有界**(bounded). 若 S 有界, 那么属于 S 的两点 P, Q 的距离 $|PQ|$ 也

有上界, 从而 $|PQ|$ 的上确界存在. 这个上确界叫做 S 的**直径**(diameter), 记为 $\delta(S)$:

$$\delta(S) = \sup_{P,Q\in S} |PQ|.$$

下面的定理是形成闭区间套法基础的定理 1.24 的扩展.

定理 1.26 非空有界闭集合列 $S_1, S_2, \cdots S_n, \cdots$, 若满足以下两个条件, 则存在唯一的点 P 属于所有这些闭集 S_n:

(i) $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(S_n) = 0$.

证明 对每个 n, 若选取属于 S_n 的点 P_n, 则点列 $\{P_n\}$ 收敛. 事实上, 根据 (ii), 对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 只要 $n > n_0(\varepsilon)$, 就有 $\delta(S_n) < \varepsilon$. 当 $n, m > n_0(\varepsilon)$ 时, 如果 $m \geqslant n$, 则根据 (i), $P_m \in S_m \subset S_n$, 所以,

$$|P_m P_n| < \delta(S_n) < \varepsilon,$$

因此根据 Cauchy 判别法, $\{P_n\}$ 收敛. 于是, 令 $P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, 则对每个 n, 若 $m \geqslant n$, 则 $P_m \in S_n$, 因此 $P = \lim\limits_{m\to\infty} P_m$ 属于 $[S_n]$. 根据假设, $[S_n] = S_n$, 所以 P 属于所有的 S_n. □

紧致集合

一般地, 对于以集合作为元素的集合 $\mathcal{U}$, 属于 $\mathcal{U}$ 的所有集合的并集用记号 $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$ 来表示. 设 S 是点集合, $\mathcal{U}$ 是以点集合作为元素的集合. 此时如果

$$S \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U,$$

那么就说 S 被属于 $\mathcal{U}$ 的集合覆盖. 把 $\mathcal{U}$ 叫做 S 的**覆盖**(covering). 特别地, 覆盖 $\mathcal{U}$ 的所有的元素都是开集合时, 把 $\mathcal{U}$ 叫做 S 的**开覆盖**(open covering). 又, S 的覆盖 $\mathcal{U}$ 是有限集合, 即由有限个点集合组成时, 把 $\mathcal{U}$ 叫做 S 的**有限覆盖**(finite covering). S 的覆盖 $\mathcal{U}$ 是覆盖 $\mathcal{U}$ 的子集合时, 把 $\mathcal{U}$ 叫做 $\mathcal{U}$ 的**子覆盖**.

定义 1.7 如果 S 的任意开覆盖都有有限子覆盖时, 把 S 叫做**紧致的**(compact).

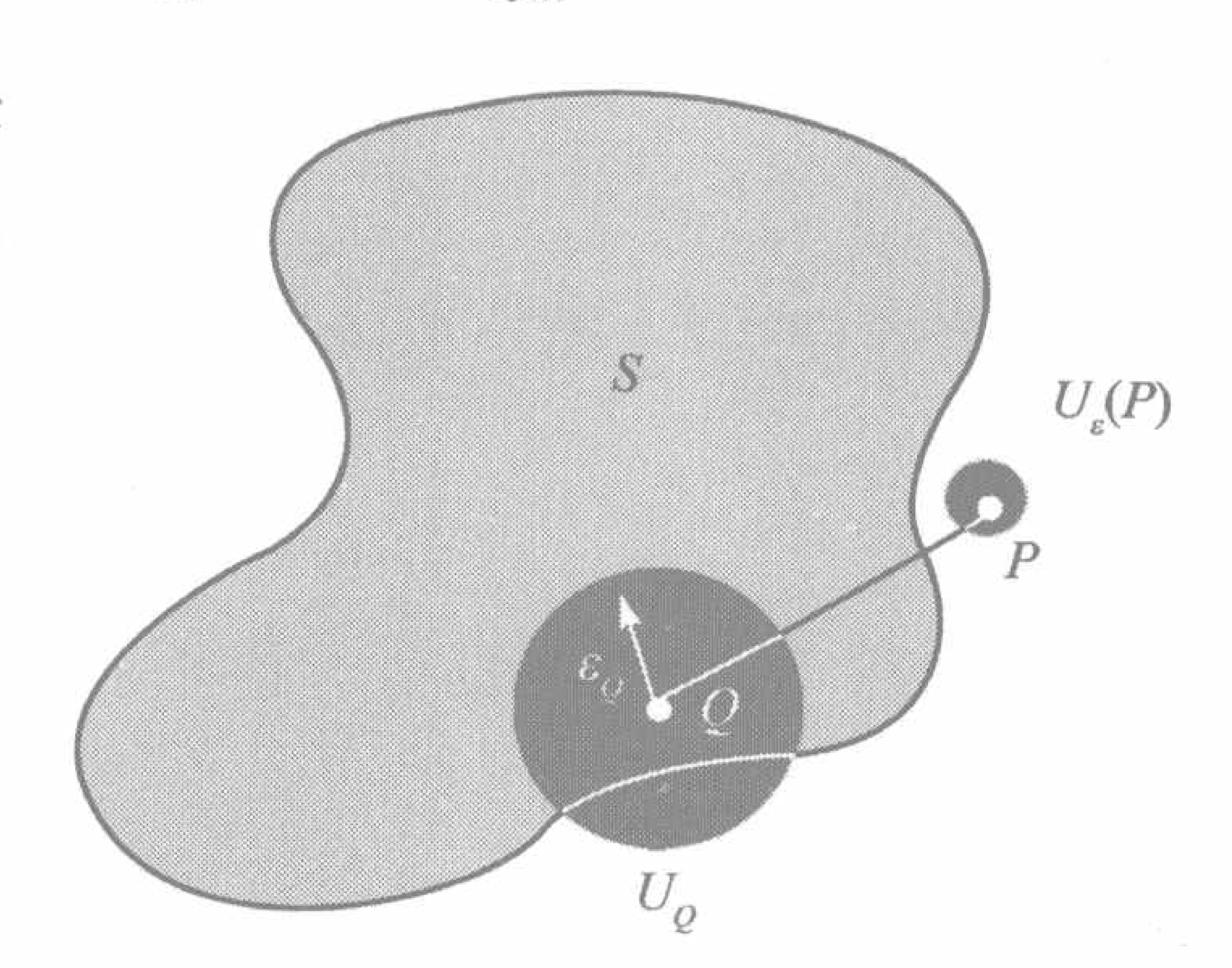
如果 S 是紧致的, 则意味着 S 具有以下的性质: 存在以开集合为元素的集合 $\mathcal{U}$, 若 S 被属于 $\mathcal{U}$ 的集合覆盖, 则 S 被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖.

定理 1.27 紧致集合 S 是有界的闭集.

证明 首先, 对于每个 $Q \in S$, 设它的 ε 邻域是 $U(Q)$, 则显然 $\mathcal{U} = \{U(Q) \mid Q \in S\}$ 是 S 的开覆盖, 因此 S 有有限个 $U(Q)$ 覆盖. 所以 S 有界. 其次, 为证明 S 是闭集, 取不属于 S 的点 P, 对于每点 $Q \in S$, 令 $U_Q = U_{\varepsilon_Q}(Q)$, $\varepsilon_Q = \dfrac{1}{3}|QP|$, 则 $\{U(Q) \mid Q \in S\}$

是 S 的开覆盖. 所以 S 有有限个 $U(Q)$ 覆盖:

$$S \subset U_{Q_1} \cup U_{Q_2} \cup \cdots \cup U_{Q_k} \cup \cdots \cup U_{Q_m}.$$



设正实数 $\varepsilon_{Q_k}, k=1,2,\cdots,m$ 中最小值是 ε, 因为 $U_{Q_k} \cap U_\varepsilon(P) = \varnothing$, $S \cap U_\varepsilon(P) = \varnothing$, 即 P 不是 S 的边界点. 这样, 不属于 S 的点 P 不是 S 的边界点. 所以 S 的边界点都属于 S. 即 S 是闭集. □

定理 1.28 (Heine-Borel 覆盖定理) 有界闭集是紧致的.

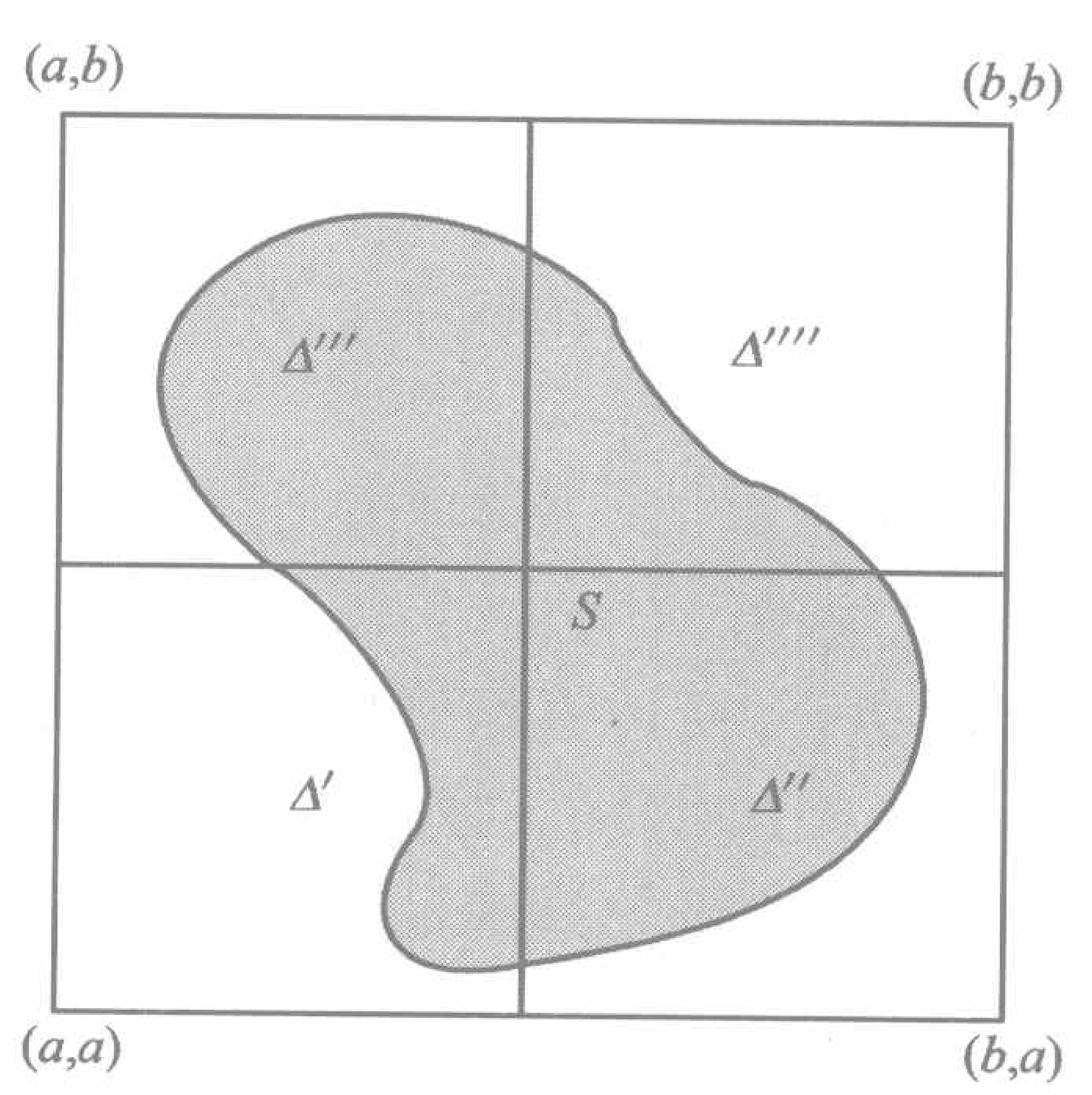
证明 设 S 是有界闭集, $\mathcal{U}$ 为 S 的开覆盖. 为证明 S 被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖, 假设 S 不能被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖. 因为 S 有界, 适当选取闭区间 $I=[a,b]$, 那么 S 包含于正方形 $\varDelta = I \times I$:

$$S \subset \varDelta = I \times I = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}.$$

$\varDelta$ 的直径 $\delta = \sqrt{2}(b-a)$. 把 I 以其中点 $c=(a+b)/2$ 分割成两个闭区间, $I'=[a,c]$, $I''=[c,b]$. 则 $\varDelta$ 被 4 个直径为 $\delta/2$ 的正方形 $\varDelta' = I' \times I'$, $\varDelta'' = I'' \times I'$, $\varDelta''' = I' \times I''$, $\varDelta'''' = I'' \times I''$ 分割:

$$\varDelta = \varDelta' \cup \varDelta'' \cup \varDelta''' \cup \varDelta''''.$$

与之对应, S 被 4 个闭集 $S' = S \cap \varDelta'$, $S'' = S \cap \varDelta''$, $S''' = S \cap \varDelta'''$, $S'''' = S \cap \varDelta''''$ 分割:



$$S = S' \cup S'' \cup S''' \cup S''''.$$

在这 4 个闭集中, 如果任一个都被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖, 那么 S 也被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖. 这与假设相反. 所以, S', S'', S''', S'''' 中至少有一个不被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖, 不妨设它是 S_1, 则

$$S_1 \subset S, \quad \delta(S_1) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

对 S_1 进行同样操作, 把不被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖的闭集设为 S_2. 则得

$$S_2 \subset S_1, \quad \delta(S_2) \leqslant \frac{\delta}{2^2}.$$

重复进行此操作, 可得不被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖的闭集列 S_n: $S_1 S_2, \cdots S_n, \cdots$, 并且

$$S \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots, \quad \delta(S_n) \leqslant \frac{\delta}{2^n}.$$

根据定理 1.26, 存在属于所有 S_n 的点 P. 因为 $P \in S$, S 是被属于 $\mathcal{U}$ 的开集覆盖, 所以 P 属于 $\mathcal{U}$ 的开集之一 U. 取 $P \in U$, $U_\varepsilon(P) \subset U$ 成立的正实数 ε, 若给定一自然数 n, 则 $P \in S_n$, $\delta(S_n) \leqslant \delta/2^n < \varepsilon$, 因此, $S_n \subset U$. 这与 S_n 不被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖相矛盾. 所以, S 被属于 $\mathcal{U}$ 的有限个开集覆盖. 即 S 是紧致集合. □

紧致的概念在现代数学中是最重要的概念之一.

定理 1.29 (Weierstrass 定理) 有界的无限集合有聚点.

证明 只须证明没有聚点的有界集合 S 是有限集合即可. 因为若存在不属于 S 的 S 的边界点, 则它必是 S 的聚点, 所以 S 的边界点都属于 S. 即, S 是闭集. 属于 S 的点 P 不是 S 的聚点, 即, $U_\varepsilon(P) \cap S$ 具有有限集合 $U_P = U_\varepsilon(P)$, S 被 $U_P, P \in S$ 覆盖. 而另一方面, 因为 S 是有界闭集, 所以据定理 1.28, S 是紧致. 因此, S 被 U_P 的有限个覆盖. 所以, S 是有限集合. □

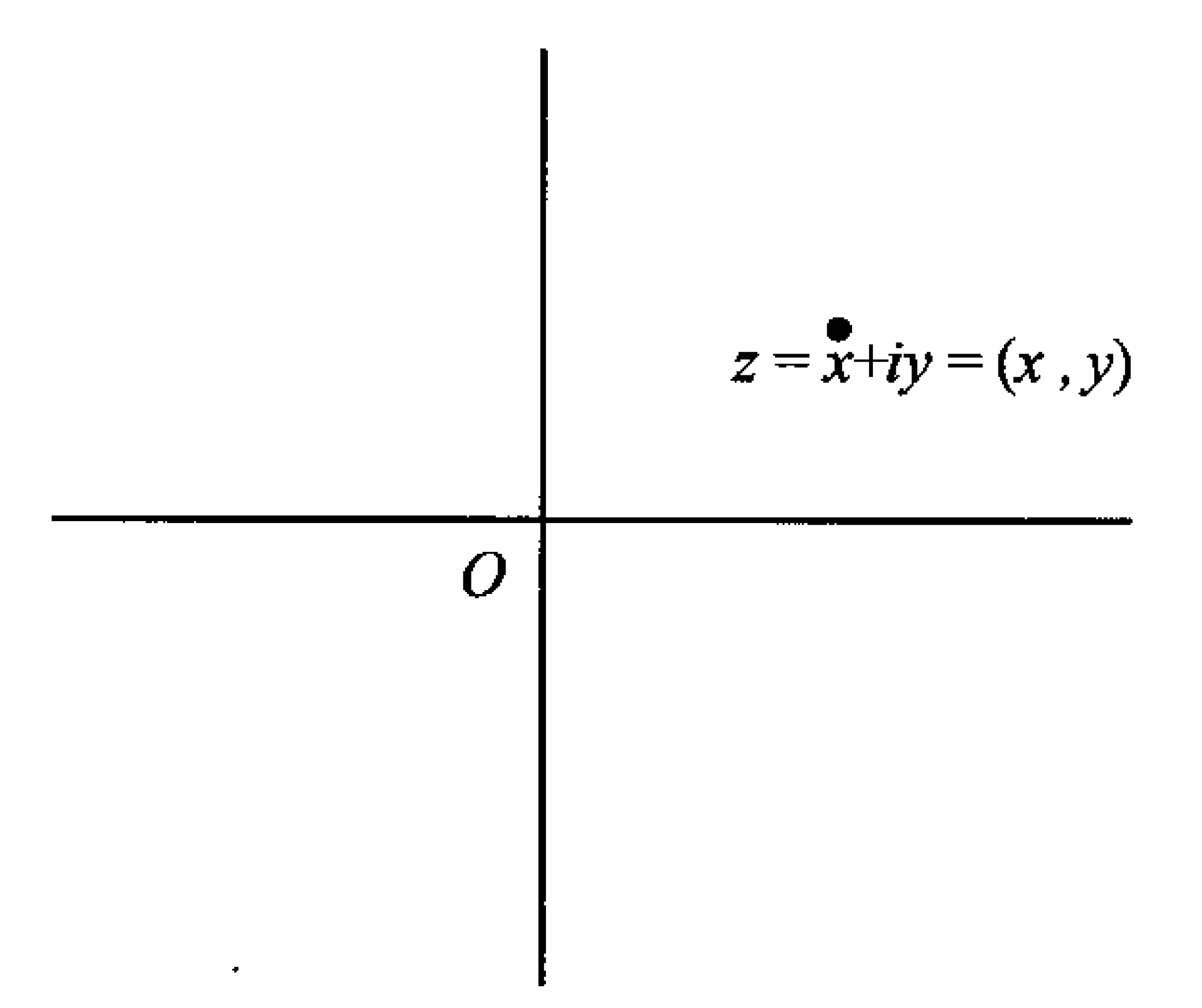
从点列 $\{P_n\}$ 中选无数个项, 按照与点列 $\{P_n\}$ 中的同样顺序排列得到点列 $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, \cdots$ 叫做 $\{P_n\}$ 的**子列**. 其中, $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 是单调增加的自然数列. 又, P_n 和 $O = (0,0)$ 的距离 $|P_n O|$ 不超过不依赖于 n 的常实数时, 点列 $\{P_n\}$ 称为有界.

定理 1.30 有界的点列有收敛的子列.

证明 设 $\{P_n\}$ 是有界点列, 并把以 $\{P_n\}$ 的项出现的点的全体集合设为 S. $P_n = P$ 的项 P_n 存在无数个时, 结论显然. 对于每个 $P \in S$, $P_n = P$ 的项 P_n 只有有限个. 则因为 S 是有界的无限集合, 所以根据定理 1.29, S 具有聚点. 若取其中的一个聚点 Q, 则对于任意正实数 ε, $U_\varepsilon(Q) \cap S$ 是无限集合. 因此, $P_n \in U_\varepsilon(Q)$ 的项 P_n 存在无数个. 于是, 首先取 P_{n_1} 使得它是满足 $P_n \in U_1(Q)$ 的项 P_n 之一. 其次取 P_{n_2} 使得它是满足 $P_n \in U_{1/2}(Q)$, $n > n_1$ 的项 P_n 之一. 接着取 P_{n_3} 使得它是满足 $P_n \in U_{1/3}(Q), n > n_2$ 的项 P_n 之一. 以下同样确定 $P_{n_4}, P_{n_5}, \cdots$ 就可以得到 P_n 的子列: $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, \cdots, P_{n_m}, \cdots$, $P_{n_m} \in U_{1/m}(Q)$. 显然, 此子列收敛于 Q. □

f) 复平面

在高中数学中, 把形如 $z=x+iy(x,y$ 为实数, $i=\sqrt{-1})$ 的数叫做复数 (complex number). 两个复数 $z=x+iy, w=u+iv$ 的和、差、积可以如下给出:



$$z+w=(x+u)+i(y+v),$$
$$z-w=(x-u)+i(y-v),$$
$$zw=(xu-yv)+i(xv+yu).$$

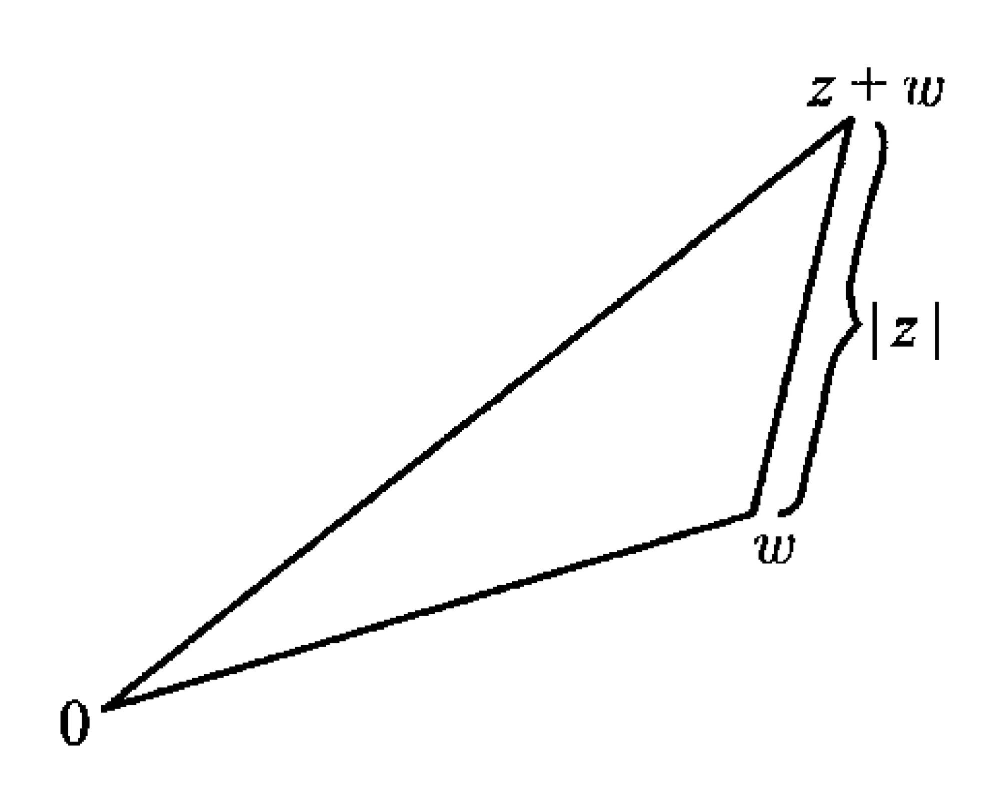
这样定义的复数的加法、减法和乘法的结合律、交换律、分配律的成立很容易得到验证.

数轴 $\mathbf{R}$ 上的点 x 即为实数 x. 同理, 把平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点 (x,y) 考虑成复数 $z=x+iy$ 时, 把 $\mathbf{R}^2$ 叫做**复平面**. 把复平面用 $\mathbf{C}$ 表示. 复数 $z=x+iy$ 的**绝对值**(absolute value) 定义为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

对于两个复数 $z=x+iy, w=u+iv$,

$$|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$



是平面 $\mathbf{C}$ 上点 z 与点 w 之间的距离. 特别地, $|z|$ 是 z 与原点 0 的距离. 因此, 根据三角不等式 (1.20),

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|.$$

对于 $z=x+iy$, 把 $x-iy$ 叫做 z 的**共轭复数** (conjugate), 记为 $\bar{z}$:

$$\bar{z}=x-iy.$$

显然有

$$\bar{\bar{z}}=z,\quad \overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w},\quad \overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w},\quad \overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}.$$

又

$$|z|^2=|\bar{z}|^2=x^2+y^2=z\cdot\bar{z}.$$

因此

$$|zw|^2=zw\overline{zw}=zw\bar{z}\,\bar{w}=z\bar{z}w\bar{w}=|z|^2|w|^2,$$

所以

$$|zw|=|z||w|.$$

如果 $z \neq 0$, 那么 $|z|>0$, 所以 $z \cdot \overline{z}/|z|^2=1$. 即非 0 的复数 z 具有倒数 $1/z=\overline{z}/|z|^2$. 所以复数全体集合 **C** 成为域. 把域 **C** 叫做**复数域**(the field of complex numbers).

对于 $z=x+iy$, 把 x 叫做 z 的**实部**(real part), 用 Re z 表示. 把 y 叫做 z 的**虚部**(imaginary part), 用 Im z 表示. 显然

$$\mathrm{Re}\ z=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \mathrm{Im}\ z=\frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

因而 Re $z \leqslant |z|$ 成立, 利用这个不等式可以简单地证明如下不等式:

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}\\&=|z|^2+2\mathrm{Re}\ z\overline{w}+|w|^2\leqslant |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2\\&=|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|z+w|\leqslant |z|+|w|.$$

以上, 我们阐述了关于复数的加减乘除的基本法则. 由这些基本法则很容易导出各种公式. 首先, $z\neq 0$ 时, 因为 $\overline{(w/z)}\overline{z}=\overline{(w/z\cdot z)}=\overline{w}$, 所以

$$\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}}.$$

根据这式与上述关于和、差、积的共轭的法则, 若假定由有限个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 通过有限次的加减乘除的演算, 得到复数 w, 则由 $\overline{z}_1,\overline{z}_2,\cdots,\overline{z}_n$ 通过同样的加减乘除的演算, 可得共轭复数 $\overline{w}$. 例如, 当 $z\neq 0$ 时,

$$w=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^k,\quad \text{则}\quad \overline{w}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_1}\right)^k.$$

反复运用公式 $|zw|=|z|\,|w|$, 则得

$$|z_1z_2z_3\cdots z_n|=|z_1||z_2||z_3|\cdots|z_n|.$$

特别地,

$$|az^n|=|a||z|^n.$$

又因为 $|z|\leqslant|z-w|+|w|$, 所以 $|z|-|w|\leqslant|z-w|$. 同理, $|w|-|z|\leqslant|w-z|$. 所以

$$||z|-|w||\leqslant|z-w|.$$

根据不等式 $|z+w|\leqslant|z|+|w|$ 得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

因此,

$$|a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n|\leqslant|a_0|+|a_1||z|+\cdots+|a_n||z|^n.$$

复平面 $\mathbf{C}$ 是平面 $\mathbf{R}^2$, 复数 $z=x+iy$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的点 (x,y), 所以在本节中关于平面上点集合的叙述, 对于复平面上的复数照样成立. 例如, 复数列 $\{z_n\}$ 即点列 $\{z_n\}$ 收敛于复数 w: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=w$ 是指点列 $\{z_n\}$ 收敛于点 w. 即意味着

$$\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0.$$

关于点列收敛的 Cauchy 判别法 (定理 1.25), 也同样对于复数成立. 即,

定理 1.31 复数列 $\{z_n\}$ 收敛的充分必要条件是, 对任意正实数 ε, 存在一个自然数 $n_0(\varepsilon)$, 只要 $n>n_0(\varepsilon)$, $m>n_0(\varepsilon)$, 就有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$ 成立.

如果复数列 $\{z_n\}$ 收敛, 则 $\{|z_n|\}$ 也收敛, 并且

$$|\lim_{n\to\infty}z_n|=\lim_{n\to\infty}|z_n|.$$

这是因为, 由于 $||z_n|-|w||\leqslant|z_n-w|$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=w$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|w|$.

同实数的无穷级数的情况相同, 对由复数 z_n 组成的无限级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$, 即 $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n+\cdots$, 其部分和

$$w_n=z_1+z_2+\cdots+z_n$$

构成的复数列 $\{w_n\}$ 收敛时, 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛. 把 $w=\lim\limits_{n\to\infty}w_n$ 叫做这个无穷级数的和. 记为

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}z_n=z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n+\cdots.$$

定理 1.32 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛.

证明 设 $w_n=z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$, $\sigma_n=|z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|$, 如果 $m<n$, 则

$$|w_n-w_m|=\left|\sum_{k=m+1}^{n}z_k\right|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}|z_k|=(\sigma_n-\sigma_m).$$

所以, 根据 Cauchy 判别法 (定理 1.31), 如果数列 $\{\sigma_n\}$ 收敛, 则数列 $\{w_n\}$ 也收敛.□

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 叫做**绝对收敛**.

定理 1.33 已知收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$, $r_n \geqslant 0$. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, 如果存在自然数 ν, 使得 $n > \nu$ 时, $|z_n| \leqslant r_n$ 成立, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛. 这是显然的.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛, 那么

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

这个不等式的证明也很容易. 事实上, 如果 $w_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, 则 $|w_n| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, 所以

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} w_n\right| = \lim_{n\to\infty} |w_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

考察关于任意复数 z 的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. 这个级数绝对收敛的证明在 1.5 节的例 1.3 中已经给出. $z = x$ 是实数的证明也是相同的. 即满足 $\nu \geqslant 2|z|$ 的自然数 ν 给定时, 如果 $n > \nu$, 那么

$$\frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^\nu}{\nu!}\frac{|z|}{\nu+1}\frac{|z|}{\nu+2}\cdots\frac{|z|}{n} < \frac{|z|^\nu}{\nu!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\nu} = \frac{|2z|^\nu}{\nu!}\frac{1}{2^n}.$$

若 $M_\nu = \nu^\nu/\nu!$, 则 $|2z|^\nu/\nu! \leqslant M_\nu$. 所以 $n > \nu$ 时,

$$\frac{|z|^n}{n!} < \frac{M_\nu}{2^n}. \tag{1.21}$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty} M_\nu/2^n = 2M_\nu$, 所以根据定理 1.33, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 绝对收敛. 若令

$$w_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!},$$

则当 $m \geqslant \nu$ 时,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - w_m\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{M_\nu}{2^n} = \frac{M_\nu}{2^m}. \tag{1.22}$$

其次证明不等式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} . \tag{1.23}$$

成立. 若 $p_n = (1+z/n)^n$, 根据二项式定理

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} z^k, \quad a_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

因为 $a_{n,k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$, 所以

$$0 < a_{n,k} < \frac{1}{k!}, \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \frac{1}{k!}.$$

因此, $n > m > \nu$ 时, 由 (1.21) 式

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_{n,k} z^k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{M_\nu}{2^k} = \frac{M_\nu}{2^m}.$$

所以若

$$p_{n,m} = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_{n,k} z^k,$$

则当 $n > m > \nu$ 时,

$$|p_n - p_{n,m}| < \frac{M_\nu}{2^m}.$$

又因为 $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1/k!$, 所以,

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,m} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k!} = w_m.$$

于是, 正实数 ε 任意给定时, 首先确定满足

$$\frac{M_\nu}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4}$$

的自然数 $m(m > \nu)$. 其次确定 $n_0(\varepsilon)(n_0(\varepsilon) > m)$ 使得 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, $|p_{n,m} - w_m| < \frac{\varepsilon}{4}$ 成立. 于是, $n > n_0(\varepsilon)$ 时,

$$|p_n - w_m| \leqslant |p_n - p_{n,m}| + |p_{n,m} - w_m| < \frac{M_\nu}{2^m} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 如果 $n, l > n_0(\varepsilon)$, 那么 $|p_n - p_l| \leqslant |p_n - w_m| + |p_l - w_m| < \varepsilon$. 所以, 由 Cauchy 判别法, 数列 $\{p_n\}$ 收敛, 其极限为 p:

$$p = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

如果 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, 因为 $|p_n - w_m| < \varepsilon/2$, 所以

$$|p - w_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

又根据 (1.22) 式

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - w_m\right| < \frac{M_\nu}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此得

$$\left|p - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| < \varepsilon,$$

因为 ε 是任意的正实数, 所以

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

从而 (1.23) 式得证.

注 等式 (1.23) 的证明虽然麻烦, 但在 (1.23) 式中如果令 $p_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k$, 当 $n \to \infty$ 时, 因为 $a_{n,k} z^k \to z^k/k!$, 就说 $p_n \to 1 + \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, 这样的证明不仅不严密, 而且在理论上是错误的. 例如设

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}, \quad b_{n,k} = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n-k}},$$

则当 $n \to \infty$ 时, 是 $b_{n,k} \to 1/2^k$ 而不是 $q_n \to \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$. 因为 $q_n = 3 - 3/2^n$, 所以当 $n \to \infty$ 时, $q_n \to 3$.

g) n 维空间

与把两个实数对 (x, y) 的全体集合用 $\mathbf{R}^2$ 表示时相同, n 个实数组 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 的全体集合用 $\mathbf{R}^n$ 表示, 且把 $\mathbf{R}^n$ 叫做 n 维空间. $\mathbf{R}^n$ 的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的点. $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ 是数轴, $\mathbf{R}^2$ 是平面, $\mathbf{R}^3$ 是高中数学中学过的空间.

对于 $\mathbf{R}^n$ 的两点 $P = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $Q = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$, 把 $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ 叫做 P 与 Q 的距离, 用 $|PQ|$ 表示:

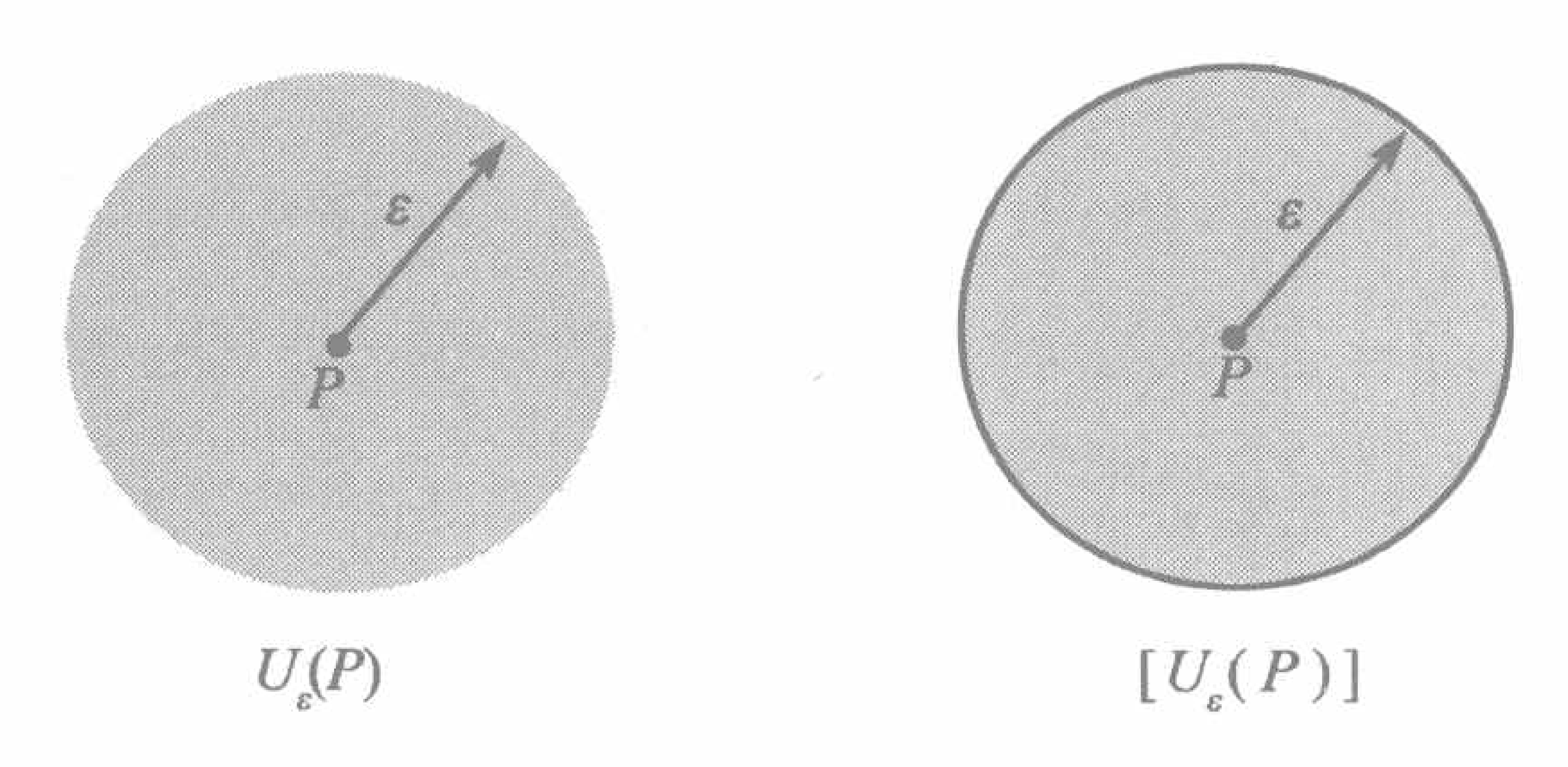
$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

设 P 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点, ε 为正实数时, 把

$$U_\varepsilon(P)=|Q\in\mathbf{R}^n||QP|<\varepsilon\}$$

叫做 P 的 ε 邻域. $U_\varepsilon(P)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中以 P 为中心、ε 为半径的球的内部. 给定 $\mathbf{R}^n$ 的点集 S, 如果存在正实数 ε, 使得 $U_\varepsilon(P)\subset S$, 则把 P 叫做 S 的内点. 对于所有的正实数 ε, 如果 $U_\varepsilon(P)\not\subset S$, $U_\varepsilon(P)\cap S\neq\varnothing$, 那么, 把 P 叫做 S 的边界点. 并且, 把 S 的边界点的全体集合叫做 S 的边界. S 与其边界集合的并集叫做 S 的闭包, 用 $[S]$ 表示. 同理, 在本节中关于平面上点集合的说明照样可以扩展到 $\mathbf{R}^n$ 的点集合上.

按我自己的理解, 数学就像物理学描述物理现象一样, 它描述的是数学现象. 要理解数学, 很重要的一点就是对数学现象要有一个直观的把握. 为此, 其数学现象表现全貌的各种情况中, 尽量去考察一些简单的情况是很有效率的. 其数学现象的全貌通过在其简单情况下的明确把握, 再把它推广到一般的情况中就非常容易了. 在本节阐述的有关点集合的现象, 即使不延伸到 $\mathbf{R}^n$, 在平面 $\mathbf{R}^2$ 中就可以展现其全貌. 并且, 在平面的情况下, 在纸上描绘出点集合的图, 那么现象是能 "看得见" 的. 这就是在本节中我们采用平面上点集合的原故. 当然, 不能用图代替论证过程. 图是把现象表示为记号, 而不是其现象本身. 例如: $U_\varepsilon(P)$ 和其闭包 $[U_\varepsilon(P)]$ 实际上都不能用图来区别. 但下图却是把其区别表示为记号.



数轴上的点集合

在数轴 $\mathbf{R}$ 上, 点 $a\in\mathbf{R}$ 的 ε 邻域是开区间: $U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 开区间 (a,b) 是开集, 闭区间 $[a,b]$ 是闭集. (a,b), $[a,b]$ 的边界都是由两点 a,b 组成的集合 $\{a,b\}$. 又 (a,b) 的闭包是 $[a,b]$. 集合 $S\subset\mathbf{R}$ 有上界时, S 的上确界是 S 的最大边界点. S 有下界时, S 的下确界是 S 的最小边界点.

根据定理 1.28, 闭区间 $I=[a,b]$ 是紧致的. 因此, I 如果被无数个开区间 $U_1,U_2,U_3,\cdots$ 覆盖, 那么 I 也被其中的有限个 $U_1,U_2,\cdots,U_m$ 覆盖. 它已被用于 1.5 节的 f) 中 "闭区间是不可数集合" 的证明中.

开区间 $(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,+\infty)$ 也是开集. 区间 $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ 是闭集, 但不把它叫做闭区间. 闭区间是指紧致的区间.

设 $\{a_n\}$ 是有界的数列, 并且 $n\neq m$ 时, $a_n\neq a_m$. 则根据 1.5 节的 c) 中阐述过

的 $\{a_n\}$ 的下极限的性质, 下极限 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 是由项 a_n 全体构成的集合 S 的最小聚点. 同理, 上极限 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 是由项 a_n 全体构成的集合 S 的最大聚点.

习 题

1. 试由无限不循环小数表示所有无理数, 导出无理数在数轴上处处稠密地分布 (1.2 节 c)).
2. 对于任意实数 α,β, 证明 $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$(1.3 节定理 1.11).
3. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于实数 α, 证明若 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 也收敛于实数 α.
4. 证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}<2$ 成立.
5. 证明有上界的数列 $\{a_n\}$ 具有收敛于其上极限 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 的子列.
6. 根据有界数列具有收敛的子列, 证明有界点列具有收敛的子列 (1.6 节定理 1.30).
7. 证明 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的三点 P,Q,R 的三角不等式 $|PR|\leqslant|PQ|+|QR|$ 成立.
8. 证明对于已知实数 $a,b,a>b>0$, 若 $a_1=\dfrac{1}{2}(a+b),b_1=\sqrt{ab},a_2=\dfrac{1}{2}(a_1+b_1)$, $b_2=\sqrt{a_1b_1},\cdots,a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}),b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\cdots$, 则数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛于同一极限值 (这个极限值叫做 a 和 b 的**算术几何平均**).
9. 证明对于已知实数 $a>0$, 若 $a_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{2}{a}\right),a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{2}{a_1}\right),\cdots,a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{2}{a_{n-1}}\right)\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$ 成立 (藤原松三郎《微分積分学 I》132 页习题 4).
10. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1$ (首先验证 $n\geqslant 3$ 时 $n^{1/n}\geqslant(n+1)^{1/(n+1)}$ 成立).

第2章 函　数

2.1 函　数

设 $D \subset \mathbf{R}$ 是实数集合, 如果对 D 的每个实数 ξ 都对应一个实数 η, 则称这种对应是由 D 定义的**函数**(function). 设 f 是由 D 定义的函数, 通过 f 与 $\xi \in D$ 对应的实数 η 叫做在 ξ 处的 f 的**值**(value), 记为 $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \eta.$$

D 叫做 f 的**定义域**(domain), f 的值 $f(\xi)$ 的全体集合:

$$\{f(\xi)|\xi \in D\}$$

叫做 f 的**值域**(range). 对于 D 的任意的子集 S, 属于 S 的实数 ξ 处的 f 的值 $f(\xi)$ 的全体集合用 $f(S)$ 来表示:

$$f(S) = \{f(\xi)|\xi \in S\}.$$

若采用这种记法, 则 f 的值域可以用 $f(D)$ 来表示.

函数 f 用 $f(x)$ 来表示, 则 x 称为**变量**(variable), D 称为 x 的变域, $f(x)$ 称为 x 的**函数**. 以 D 为变域的变量 x, 是代表属于 D 的实数的符号. 把 x 用属于 D 的特定实数 ξ 替换时, $f(\xi)$ 表示 ξ 处的函数 $f(x)$ 的值. 或者说, 变量 x 是一个符号, 在它的位置上可以代入属于 D 的任意实数 ξ. 即 x 是把函数 f 写成 $f(\ )$ 时, 表示 $(\ )$ 的记号. 根据一般习惯, 我们为了简单起见, *把属于 D 的实数和变量用同样的字母 x 表示*.

令 $y = f(x)$, 我们就说 y 是 x 的函数, x 是**自变量**(independent variable), y 是**因变量**(dependent variable). "自变量"、"因变量" 的术语是把伴随着量 x 的变动而变动的量 y 定义为 x 的 "函数" 的时代产物, 其细微差别用现代的方式很难明确地说明. 如果要解释的话, 可以说 x 是表示可以代入属于函数 f 的定义域 D 的任意实数 ξ 的位置的记号. y 是表示给 x 代入 ξ 时应代入 $f(\xi)$ 的位置的符号. 但称 "y 是 x 的函数" 时, 是基于 "y 是随着 x 的变动而变动的量", 把属于 D 的实数和变量同样用 x 表示的习惯也是基于 "x 是变动的量". 记 $y = f(x)$ 时, x 是变量还是属于 f 定义域中的一个实数, 这一般通过上下文就可以知晓, 不会产生混淆.

例 2.1 已知数列 $\{a_n\}$, 若 $f(n)=a_n$, 则可以得到由自然数全体集合 $\mathbf{N}$ 定义的函数 f. 此数列是以 $\mathbf{N}$ 为定义域的函数.

例 2.2 对实数 $x(0<x<1), x$ 是无理数时, $f(x)=0$. x 是有理数时, 把 x 表示为不可约分数 $x=\dfrac{q}{p}$, p,q 为互素的自然数. 若令 $f(x)=1/p$, 则可得在开区间 (0, 1) 上定义的函数 f. f 的值域是 $\{0,1/2,1/3,1/4,\cdots,1/n,\cdots\}$.

例 2.3 设 D 是满足 $0<x<1$ 的有理数 x 的全体集合, 对于 $x\in D$, 与例 2.2 相同地把 x 表示为不可约分数 $x=\dfrac{q}{p}$. 若令 $f(x)=\dfrac{1}{p}$, 则确定以 $D=\mathbf{Q}\cap(0,1)$ 为定义域的函数 f. f 的值域为 $\{1/2,1/3,1/4,\cdots\}$.

在本章, 我们主要讨论定义在区间或从区间上除去有限个点后的集合上的函数. 例如, 函数 f 是定义在从区间 I 中除去一点 a 的集合 $I-\{a\}$ 上的, 称 f 是在从 I 中除去点 a 的集合上定义的函数. 进一步, f 用 I 或 $I-\{a\}$ 来定义时, 称 f 是在 I, 或者至多从 I 中除去 a 的集合上定义的函数.

函数的极限 在 1.4 节中我们已经叙述了数列极限的明确定义. 关于函数的极限, 我们在高中数学中也学过, 但其明确的定义, 如果用 1.4 节中同样的方法叙述, 应该如下:

定义 2.1 设 $f(x)$ 是定义在 I 中至多除去点 $a, a\in I$ 上的函数, 并设 α 为实数. 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 只要

$$0<|x-a|<\delta(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad |f(x)-\alpha|<\varepsilon \tag{2.1}$$

成立. 则 $x\to a$ 时, $f(x)$ 收敛于 α, 称 α 是 $x\to a$ 时的 $f(x)$ 的极限值, 记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,$$

或者记为

$$x\to a \text{ 时}, \quad f(x)\to\alpha.$$

把 "$x\to a$ 时, $f(x)\to\alpha$" 简写为 "$f(x)\to\alpha(x\to a)$". "$x\to a$ 时" 读作 "x 趋于 a 时".

严格说来, (2.1) 式应写成

$$\text{当 } 0<|x-a|<\delta(\varepsilon), \quad x\in I \text{ 时}, \quad |f(x)-\alpha|<\varepsilon \text{ 成立}.$$

但因为 $x\notin I$ 时, $f(x)$ 未被定义, 所以 (2.1) 式是没有意义的. 要使 (2.1) 式有意义, 必须 $x\in I$, 所以简写为 "$x\in I$". 同样地, 以下在 $x\notin I$ 无意义的情况下, 省略条件 $x\in I$.

函数的极限与数列的极限之间存在密切的关系. 首先, $x\to a$时, 如果 $f(x)$ 收敛于 α, 那么, 对于收敛于α 的所有数列 $\{x_n\}$, $x_n\neq a$, 数列$\{f(x_n)\}$ 收敛于 α.

[证明] 因为数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 对应的任意正实数 δ, 存在 $n_0(\delta)$, 只要 $n > n_0(\delta)$, 就有 $|x_n - a| < \delta$ 成立. 所以, 根据 (2.1) 式, 对于任意实数 ε, 只要 $n > n_0(\delta(\varepsilon))$, 就有 $|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon$ 成立. 即 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 α. □

对于收敛于a 的所有数列$\{x_n\}$, $x_n \neq a$, 如果数列$\{f(x_n)\}$ 收敛, 则$x \to a$ 时, $f(x)$ 收敛.

[证明] 根据假设, 对每一个收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, 确定 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, 但此极限 α 事实上不依赖于数列 $\{x_n\}$. 因为, 若数列 $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, 和数列 $\{y_n\}$, $y_n \neq a$, 都收敛于 a, 则把 x_n 与 y_n 交叉排列的数列: $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \cdots, x_n, y_n, \cdots$ 也收敛于 a. 这个数列用 $\{z_n\}$ 表示, 则

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha,$$

即 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不依赖于数列 $\{x_n\}$.

为证明 $x \to a$ 时, $f(x)$ 收敛于 α, 先假设 $x \to a$ 时, $f(x)$ 不收敛于 α. 则对于任意正实数 ε_0, 不论取什么样的正实数 δ, 若

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ 则 } |f(x) - \alpha| < \varepsilon_0$$

未必成立. 即, 存在满足 $0 < |x - a| < \delta$ 并且 $|f(x) - \alpha| \geqslant \varepsilon_0$ 的 x. 若 $\delta = 1/n, n$ 是自然数, 则存在点 x_n 满足 $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, $|f(x_0) - \alpha| \geqslant \varepsilon_0$. 这样得到的数列 $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ 收敛于 a, 所以, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$. 这与 $|f(x_n) - \alpha| \geqslant \varepsilon_0$ 相矛盾. □

Cauchy 判别法 关于函数的收敛, 也有和数列一样的 Cauchy 判别法.

定理 2.1 (Cauchy 判别法) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 或者 I 中至多除去点 a $(a \in I)$ 后的集合上的函数. $x \to a$ 时, $f(x)$ 收敛的充分必要条件是对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得只要

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), \quad 0 < |y - a| < \delta(\varepsilon), \text{ 就有 } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2.2}$$

成立.

证明 同数列的情况一样, 必要性的证明直接从收敛的定义可得. 为了证明充分性, 先假设这个条件成立, 若取收敛于 a 的任意数列 $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, 则对于任意正实数 δ, 存在 $n_0(\delta)$, 使得 $n > n_0(\delta)$ 时 $|x_n - a| < \delta$ 成立. 所以根据 (2.2) 式, 对于任意正实数 ε, 只要 $m, n > n_0(\delta(\varepsilon))$ 就有 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ 成立. 因此, 根据数列收敛的 Cauchy 判别法, 数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 故根据上述结果, 当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 收敛. □

函数的极限也有和数列极限相同的运算法则成立. 如果$x \to a$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 同时收敛, 则它们的一次组合$c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 及它们的积$f(x)g(x)$ 也收敛, 其中c_1, c_2

是常数. 并且

$$\lim_{x\to a}(c_1f(x)+c_2g(x)) = c_1\lim_{x\to a}f(x)+c_2\lim_{x\to a}g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

进而, 若 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, 那么, 商 $f(x)/g(x)$ 也收敛, 并且

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

要证明这些运算法则, 我们只要运用上述函数的极限和数列极限之间的关系, 把它归结为数列极限的运算法则就可以了.

在上述定义 2.1 中, 例如 $I=[a,b)$ 时, 当作 $x\in I$, 所以 (2.1) 式与

$$0 < x-a < \delta(\varepsilon) \text{ 时}, \quad |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

等价. 因此, $\alpha = \lim\limits_{x\to a}f(x)$ 是 x 从右趋于 a 时 $f(x)$ 的极限值.

a 是 I 的内点时, 有时也讨论 x 从右或者从左趋于 a 时的极限值. 即, 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$0 < x-a < \delta(\varepsilon)\text{时}, \ |f(x)-\alpha| < \varepsilon \tag{2.1}^+$$

成立, 那么, 称 α 是 x 从右趋于 a 时的 $f(x)$ 的极限值, 记为

$$\alpha = \lim_{x\to a+0}f(x). \tag{2.3}$$

x 从左边趋于 a 时的 $f(x)$ 的极限值, 同样可以定义为

$$\beta = \lim_{x\to a-0}f(x).$$

作为函数极限值的 $\pm\infty$ 的含义也和数列的情况相同. 例如, 对于任意的实数 μ, 存在正实数 $\delta(\mu)$, 使得

$$|x-a| < \delta(\mu) \text{ 时, 有 } f(x) > \mu$$

成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时向 $+\infty$ 发散. 记为

$$\lim_{x\to a}f(x) = +\infty.$$

又, 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\nu(\varepsilon)$, 使得

$$x > \nu(\varepsilon) \text{ 时, 有 } |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

成立, 那么称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时收敛于 α. 记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha.$$

函数的图像

一般地, 对于在实数集合 $D \subset \mathbf{R}$ 上定义的函数 f, $x \in D$ 与 f 在 x 处的值 $f(x)$ 构成的数对 $(x, f(x))$ 的全体组成的 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ 的子集, 叫做函数的**图像**(graph), 用 G_f 表示.

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 | x \in D\}.$$

我们在高中数学中学到的图像是曲线或几个曲线的连接, 如上述例 2.3 的函数 $f(x)$ 的图像 G_f, 只是离散的点的集合, 并不可能把 G_f 的图像全部描绘出来.

2.2 连续函数

a) 连续函数

定义 2.2 设 $f(x)$ 是在某区间 I 上定义的函数. 此时, 如果在点 $a \in I$ 处,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

那么就说 $f(x)$ 在点 a 处**连续**. 或者说在 $x = a$ 处连续. 函数 $f(x)$ 在属于其定义域 I 的每一点处都连续时, 称 $f(x)$ 是**连续函数**, 或称 $f(x)$ 为 x 的连续函数.

我们在高中数学中已经学过了这个连续函数的定义, 但那时, 极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 尚未被明确定义. 我们可追溯到极限的定义来考虑: 对于任意实数ε, 选取一个正实数$\delta(\varepsilon)$, 如果$|x - a| < \delta(\varepsilon)$ 时, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 成立, 那么我们就称 $f(x)$ 在点 a 处连续. 因为 $x = a$ 时, $f(x) = f(a)$, 所以在这个定义中, 就不需要 (2.1) 的条件 $0 < |x - a|$.

例 2.4 我们来考察例 2.2 的开区间 (0, 1) 上定义的函数 $f(x)$. 设 a 是 $0 < a < 1$ 的有理数时, a 可用不可约分数 $a = q/p$ 表示, 因为 $f(a) = 1/p$, 所以对于 $\varepsilon = 1/2p$, 无论取什么样的正实数 δ, 存在 $|x - a| < \delta$ 的无理数 x, 使得 $f(x) = 0$ 成立. 因此, $|f(x) - f(a)| = 1/p > \varepsilon$, 所以 $f(x)$ 在有理点 a 处不连续. a 为 $0 < a < 1$ 的无理数时, 对于任意给定的正实数 ε, 因为 $p \leqslant 1/\varepsilon$ 的不可约分数 q/p $(0 < q/p < 1)$ 只有有限个, 所以能够选择正实数 δ, 使得开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 不包含任一满足

$p \leqslant 1/\varepsilon$ 的不可约分数 q/p. 这样选择 δ 时, 若满足 $|x-a|<\delta$ 的 x 是有理数, 则 x 可表示为 $p>1/\varepsilon$ 的不可约分数: $x=q/p$ 并且 $f(x)=1/p$. 因此 $f(a)=0$, 所以, $|f(x)-f(a)|=1/p<\varepsilon$. 若 x 为无理数, 那么, 当然 $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$. 不论哪种情况, $|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, 所以, $f(x)$ 在无理点 a 连续. 总之, $f(x)$ 是在开区间 $(0,1)$ 上任意有理点处不连续但在所有的无理点处连续的函数.

若 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在区间 I 上的连续函数, 则它们的一次组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$ (c_1,c_2 为常数) 以及它们的积 $f(x)g((x)$ 也是定义在区间 I 上的连续函数. 进而, 若对属于 I 的各点 x, $g(x)\neq 0$, 则它们的商 $f(x)/g(x)$ 也是定义在区间 I 上的连续函数. 根据函数极限的运算法这些结论是显然的.

在数轴 $\mathbf{R}$ 上, x 显然是 x 的函数. 因此, $x^2=x\cdot x$, $x^3=x\cdot x^2,\cdots,x^n=x\cdot x^{n-1},\cdots$ 是 x 的连续函数, 所以它们的线性组合即多项式

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n$$

是 x 的连续函数. 除去使 $g(x)=0$ 的点, 有理式 $f(x)/g(x)$ 是连续的.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果在点 $a\in I$ 处,

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a),$$

就称函数 $f(x)$ 在点 a 处**右连续**, 如果

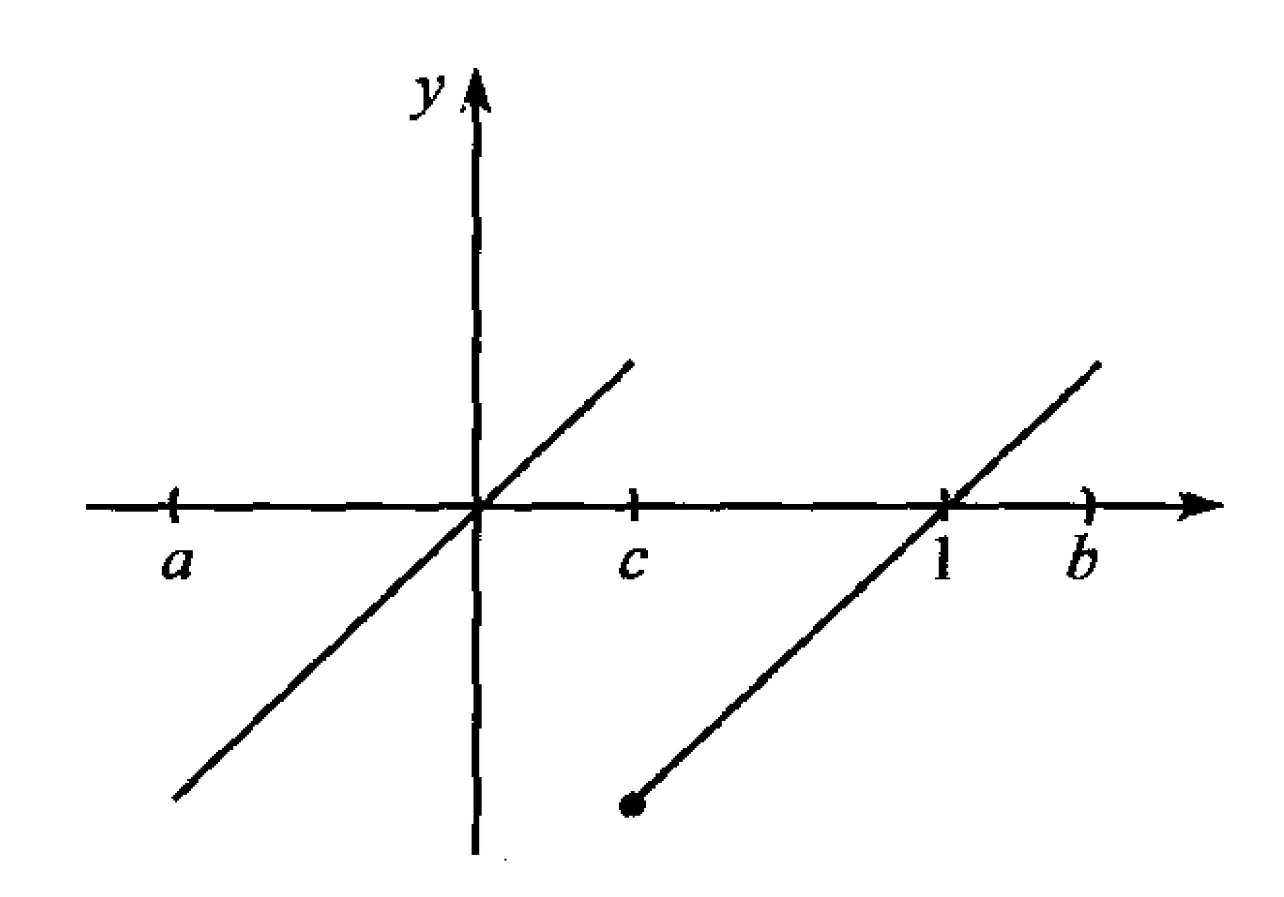
$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a),$$

就称函数 $f(x)$ 在点 a 处**左连续**. 当点 a 是区间 I 的左端时, 例如 $I=[a,b)$ 时, $f(x)$ 在点 a 处连续, 是指在点 a 处右连续. 点 a 是区间 I 的右端时, 也是同理.

一般地, 在实数集合 D 上有定义的函数 f, 以 $E\subset D$ 作为 D 的任一子集时, 缩小 f 的定义域到 E, 得到的函数叫做 f 在 E 上的**限制**(restriction). 用 $f|E$ 或 f_E 表示. f_E 是以 E 为定义域的函数, 当 $x\in E$ 时, $f_E(x)=f(x)$.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, $J\subset I$ 是 I 的子区间. 当 $f(x)$ 在 J 的限制 $f_J(x)$ 是连续函数时, *称 $f(x)$ 在区间 J 上连续*. 一般地, 对于函数的某个性质 $\mathcal{A}$, *当 $f_J(x)$ 具有 $\mathcal{A}$ 时, 称 $f(x)$ 在 J 上具有 $\mathcal{A}$.*

例如, 设 $a<c<b$. 如果在区间 (a,b) 上, 当 $a<x<c$ 时, 把 $f(x)$ 定义为 $f(x)=x$, 当 $c\leqslant x<b$ 时, 把 $f(x)$ 定义为 $f(x)=x-1$, 那么 $f(x)$ 在 c 点处不连续, 但在区间 $[c,b)$ 上连续. 因为 $f_{[c,b)}(x)$ 在点 c 处连续, 是意味着 $f(x)$ 在 c 点处右连续.



当 $f_J(x)$ 具有 $\mathcal{A}$ 时, 称 $f(x)$ 在 J 上具有 $\mathcal{A}$, 这只限于 $J \subset I$是I 的子区间, 并不适用于任意的子集 $E \subset I$. 例如, 当 $E = \{a\}$ 只是由一点 $a \in I$ 组成的集合时, 说由一点 a 定义的函数 $f_{\{a\}}(x)$ 连续等等是没有意义的.

b) 连续函数的性质

首先, 我们来叙述高中数学中学过的中值定理的严格的证明.

定理 2.2 (中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 并且 $f(a) \neq f(b)$, 那么, 对于在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意实数 μ, 存在使得

$$f(c) = \mu, \quad a < c < b$$

成立的实数 c.

证明 因为 $f(a) < f(b)$ 或 $f(a) > f(b)$, 所以我们仅对 $f(a) < f(b)$ 的情况进行证明. 此时, $f(a) < \mu < f(b)$. 设 S 是满足 $f(x) < \mu$, $a \leqslant x < b$ 的实数 x 的全体集合. 因为 $f(a) < \mu$, 所以 $a \in S$. 设 S 的上确界为 c, 如果 $c \notin S$, 则存在收敛于 c 的数列 $\{x_n\}$, $x_n \in S$, 因此 $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \mu$. 从而 $c \in S$ 并且 $f(c) \leqslant \mu$. 这里, 若假设 $f(c) < \mu$, 因为 $f(x)$ 是连续函数, 所以满足条件 $|x-c| < \delta$, $f(x) < \mu$ 的正实数 δ 一定存在. 因此, 如果 $c < x < c+\delta$, 则 $x \in S$. 这与 c 是 S 的上确界相矛盾, 所以 $f(c) = \mu$. □

定理 2.2 中, $f(x)$ 的定义域若包含区间 $[a,b]$, 则显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 即若 $f_{[a,b]}(x)$ 是连续函数, 则定理 2.2 成立. 这就是 "$f(x)$ 在 I 上具有 $\mathcal{A}$" 这种说法的便利之处.

设 $f(x)$ 是 I 上的连续函数, 如果 ε 是任意给定的正实数, 那么对给定的每个点 $a \in I$, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$|x-a| < \delta(\varepsilon) \text{ 时}, \quad \text{有} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

成立, 可是并不一定存在一个与 a 无关的 $\delta(\varepsilon)$, 即未必存在 $\delta(\varepsilon)$, 使得 (2.4) 式对所有的 $a \in I$ 同时成立. 如果这样的 $\delta(\varepsilon)$ 存在, 那么就说 $f(x)$ 在 I 上是一致连续的. 即

定义 2.3 对于任意给定的正实数 ε, 总存在一个正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得当 $|x-y|<\delta(\varepsilon)$, $x\in I$, $y\in I$ 时, 就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 成立, 那么称 $f(x)$ 在 I 上是**一致连续的**(uniformly continuous).

显然, 在 I 上一致连续的函数在 I 上是连续的.

例 2.5 考察在区间 (0,1] 上连续的函数 $f(x)=1/x$. 这里, 因为 $|1/x-1/a|=|x-a|/xa$. 所以要使 (2.4) 成立, 必须有

$$\delta(\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon a^2}{1+\varepsilon a},$$

但对所有的 a, $0<a\leqslant 1$, 不存在满足这个不等式的正实数 $\delta(\varepsilon)$. 即 $f(x)=1/x$ 在区间 (0,1] 上不是一致连续的.

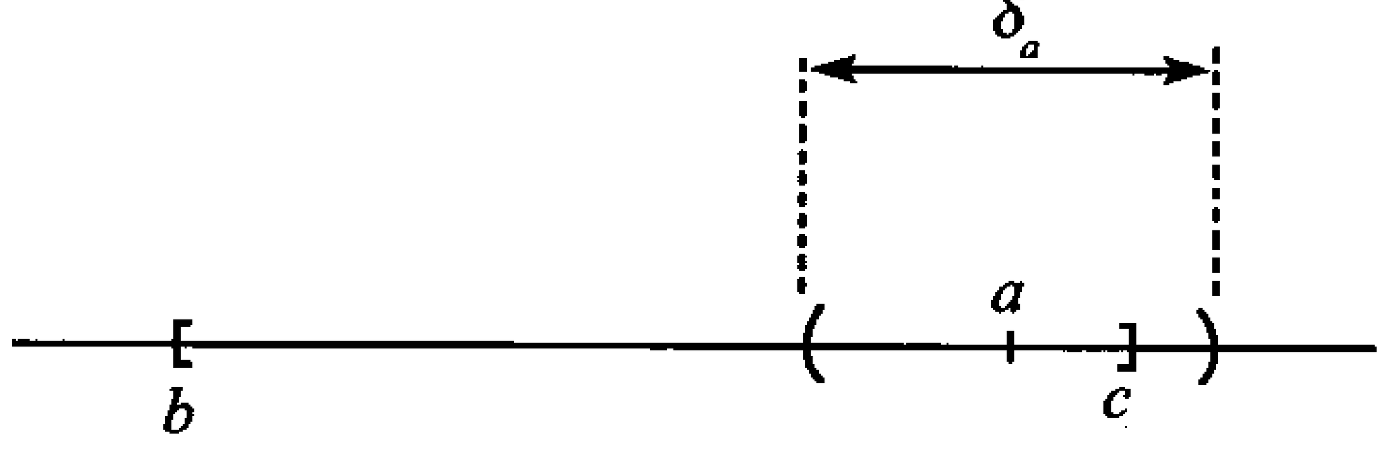
定理 2.3 如果函数在闭区间 $[b,c]$ 上连续, 那么它在该区间上一致连续.

证明 设 $f(x)$ 是 $I=[b,c]$ 上的连续函数, ε 为任意给定的正实数. 因为 $f(x)$ 在 I 上连续, 所以对于每点 $a\in I$, 存在正实数 δ_a, 只要

$$|x-a|<\delta_a,\quad \text{就有}\quad |f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 若 U_a 为 a 的 $\delta_a/2$ 邻域:

$$U_a=\left(a-\frac{1}{2}\delta_a,\quad a+\frac{1}{2}\delta_a\right),$$



则 I 被这个邻域 U_a, $a\in I$ 覆盖. 因为 I 是有界闭集, 所以根据定理 1.28, I 是紧致集合. 所以 I 被有限个 U_a 覆盖, 即 $I\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}U_{a_k}$. 如果把 m 个正实数 $\delta_{a_k}/2$, $k=1,2,\cdots,m$, 中最小的一个设为 δ, 那么如下可证, 当 $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 成立. 事实上, 因为 $y\in I$, 所以 y 属于 U_{a_k} 中的某一个, $y\in U_{a_k}$, 即

$$|y-a_k|<\frac{1}{2}\delta_{a_k}.$$

因此

$$|f(y)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又, 因为 $|x-y|<\delta$, 所以

$$|x-a_k|\leqslant|x-y|+|y-a_k|<\delta+\frac{1}{2}\delta_{a_k}\leqslant\delta_{a_k}.$$

故

$$|f(x)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(y)|<\varepsilon.$$ □

一般地, 设 $f(x)$ 是定义域为 $D\subset\mathbf{R}$ 的函数, 如果存在属于其值域 $f(D)=\{f(x)|x\in D\}$ 的最大数, 那么就称它为 $f(x)$ 的**最大值**. 如果存在最小的数, 那么就称它为 $f(x)$ 的**最小值**. 当 $f(D)$ 有界时, 就称函数 $f(x)$ 有界.

例 2.6 如果在区间 $(-1,+1)$ 上的函数 $f(x)$ 定义为 $f(x)=1/(1-x^2)$, 那么 $f(x)$ 有最小值是 1, 但不存在最大值.

定理 2.4 在闭区间上定义的连续函数, 具有最大值和最小值.

证明 设 $f(x)$ 是定义在 $I=[b,c]$ 上的连续函数. 根据定理 2.3, 因为 $f(x)$ 在 I 上一致连续, 因此存在正实数 δ, 使得当 $|x-y|<\delta$, $x\in I, y\in I$ 时, $|f(x)-f(y)|<1$ 成立. 设 m 是满足 $m\delta>c-b$ 的自然数. 对于任意 $x\in I$, 区间 $[b,x]$ 被 $m-1$ 个点 $x_1, x_2,\cdots,x_{m-1}$ 分成 m 等分, 并且令 $x_0=b$, $x_m=x$, 则

$$0<x_k-x_{k-1}=\frac{1}{m}(x-b)\leqslant\frac{1}{m}(c-b)<\delta,$$

因此

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|<1.$$

所以

$$|f(x)-f(b)|=\left|\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|<m.$$

故 $f(x)$ 有界, 即 $f(I)$ 有界.

设 β 是 $f(I)$ 的上确界, 则 $f(x)\leqslant\beta$. 若假设 β 不是 $f(x)$ 的最大值, 则当 $x\in I$ 时, 恒有 $f(x)<\beta$ 成立. 因此, 若 $g(x)=1/(\beta-f(x))$, 则 $g(x)$ 也是定义在 I 上的连续函数. 所以, 根据上述结果, $g(x)$ 有界, 即存在 $g(x)<\gamma$ 的正实数 γ:

$$\frac{1}{\beta-f(x)}=g(x)<\gamma,$$

因此

$$f(x)<\beta-\frac{1}{\gamma}.$$

这与 β 是 $f(I)$ 的上确界相矛盾. 所以, β 是 $f(x)$ 的最大值. 同理, 如果 α 是 $f(I)$ 的下确界, 那么 α 是 $f(x)$ 的最小值. □

定理 2.5　定义在闭区间 I 上的连续函数 $f(x)$ 的值域 $f(I)$ 是闭区间.

证明　设 $f(x)$ 的最小值是 α, 最大值是 β, 取点 $a, b \in I$, 使得 $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. 则根据中值定理, 对于满足 $\alpha < \mu < \beta$ 的任意实数 μ, 存在实数 c 满足 $f(c) = \mu$, $a < c < b$. 所以, $f(I) = [\alpha, \beta]$. □

当区间 I 未必是闭区间时, 下面的定理成立.

定理 2.6　定义在区间 I 上的连续函数的值域 $f(I)$ 是区间.

证明　I 作为非闭区间来证明. 把 I 用 $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ 的闭区间列 $I_1, I_2, I_3, \cdots$ 的并集来表示: $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 根据定理 2.5, $f(I_n)$ 是闭区间, $f(I_1) \subset f(I_2) \subset f(I_3) \subset \cdots$. 并且 $f(I)$ 是这些闭区间的并集. $f(I) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(I_n)$, 所以 $f(I)$ 是区间. □

复合函数　一般地, 在 $D \subset \mathbf{R}$ 上定义的函数 f 的值域 $f(D)$, 包含于函数 g 的定义域时,

$$h(x) = g(f(x))$$

叫做 f 和 g 的**复合函数**, 把 h 用 $g \circ f$ 表示.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的 x 的连续函数, $g(y)$ 是定义在区间 J 上的 y 的连续函数. 如果 $f(I) \subset J$, 那么, 复合函数 $g(f(x))$ 在 I 上连续. 这很容易验证. 事实上, 若 $a \in I, b = f(a)$, 则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$, 所以 $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$.

注　当 $g(y)$ 不连续时, 即使 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, 也未必有 $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

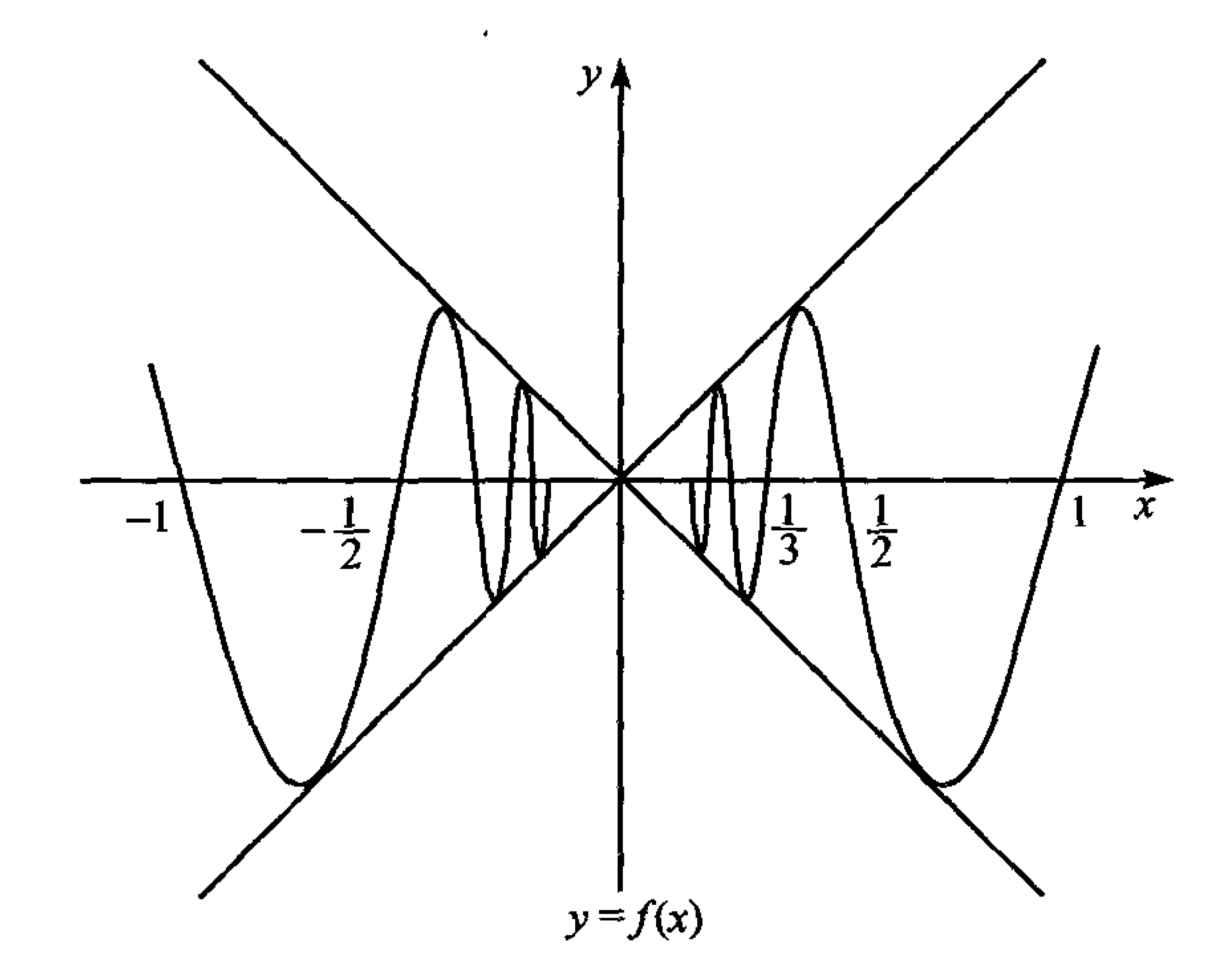
例 2.7　虽然我们将在后面论述三角函数, 但在这里, 我们通过灵活运用高中数学中学过的 $\sin x$, 来如下定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$: $f(0) = 0$, 而 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x \sin(\pi/x)$; $g(0) = 0$, 而 $x \neq 0$ 时, $g(x) = 1$. 因为 $|f(x)| \leqslant |x|$, 所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. 因此 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数. 又当 $0 < |x|$ 时, $g(x) = 1$. 所以 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. 当 $x = 1/m, m$ 为非 0 整数时, $f(x) = 0$.

否则, 因为 $f(0) \neq 0$, 因此当 $x=1/m$ 时, $g(f(x)) = 0$, 当 $x \neq 1/m$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ 时, $g(f(x)) = 1$. 所以 $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ 不存在.

c) 单调函数和反函数

对属于 $f(x)$ 定义域的任意两个数 x, y, 如果当 $x < y$ 时, 有 $f(x) < f(y)$, 那么称 $f(x)$ 为**单调递增**(monotone increasing); 如果当 $x < y$ 时, 有 $f(x) > f(y)$, 那么称 $f(x)$ 为**单调递减**(monotone decreasing). 把单调递增或单调递减的函数通称为**单调函数**.

一般地, 对属于定义在 $D \subset \mathbf{R}$ 上的函数 f 的值域 $f(D)$ 的每个实数 y, 存在唯



一的 $x \in D$ 使得 $f(x) = y$ 成立时, 即对每个 y 存在唯一的 x 与之对应, 这种对应叫做 f 的**反函数**, 并用 f^{-1} 表示. f^{-1} 的定义域是 f 的值域 $f(D)$, f^{-1} 的值域是 f 的定义域 D, 显然, 单调函数具有反函数.

定理 2.7 定义在区间上的连续单调递增 (递减) 函数的反函数, 是定义在区间上的连续单调递增 (递减) 函数.

证明 设 f 是定义在区间 I 上的连续单调递增函数. 根据定理 2.6, f 的反函数 f^{-1} 的定义域 $\Delta = f(I)$ 是一个区间. 任选两点 $x, a \in I$ 并且 $y = f(x)$, $b = f(a)$ 时, 因为 f 单调递增, $x \geqslant a$, 那么 $y \geqslant b$. 所以如果 $y < b$, 那么 $x = f^{-1}(y) < a = f^{-1}(b)$. 即 f^{-1} 是单调递增函数. 要证明 f^{-1} 连续, 假设 f^{-1} 在一点 $b \in \Delta$ 上不连续, 则对于某个正实数 ε 及任意自然数 n, 存在 $y_n \in \Delta$, 使得

$$|y_n - b| < \frac{1}{n}, \quad |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)| \geqslant \varepsilon$$

成立. 若令 $x_n = f^{-1}(y_n)$, $a = f^{-1}(b)$, 则 $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$, 即 $x_n \leqslant a - \varepsilon$ 或 $x_n \geqslant a + \varepsilon$, 因此 f 是单调递增函数. 所以, $y_n = f(x_n) \leqslant f(a - \varepsilon)$ 或 $y_n = f(x_n) \geqslant f(a + \varepsilon)$. 因为 $f(a) = b$, 所以 $y_n \leqslant f(a - \varepsilon) < b$ 或 $y_n \geqslant f(a + \varepsilon) > b$. 这与 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ 相矛盾. □

对属于定义域的任意两个数 x, y, 当 $x < y$ 时, 有 $f(x) \leqslant f(y)$, 则称 $f(x)$ 为**单调非减**的 (monotone non-decreasing); 当 $x < y$ 时, 有 $f(x) \geqslant f(y)$, 则称 $f(x)$ 为**单调非增**的 (monotone non-increasing).

d) 取复数值的连续函数

属于区间 I 的每个实数 x 都分别对应一个复数 w, 把这种对应 f 叫做定义在 I 上的取复数值的函数, 根据 f 对应于 x 的复数 w 叫做 f 在 x 上的值, 并用 $f(x)$ 来表示. 把 x 看成以 I 为定义域的变量时, 称 $w = f(x)$ 是实变量 x 的取复数值的

函数. 当 $f(x)$ 没有强调必须取复数时, 把 $f(x)$ 叫做函数.

设 $f(x)$ 是定义在 I 上的取复数值的函数. 对于 I 上的一点 a,

$$\lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0$$

时, 称 $f(x)$ 在点 a 处连续. $f(x)$ 在 I 的任意点都连续时, 称 $f(x)$ 在 I 上连续或称 $f(x)$ 是连续函数. 若表示为

$$f(x)=u(x)+iv(x),\quad u(x)=\mathrm{Re}f(x),\quad v(x)=\mathrm{Im}f(x),$$

则

$$|f(x)-f(a)|=\sqrt{|u(x)-u(a)|^2+|v(x)-v(a)|^2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0$ 等价于 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u(a)$ 并且 $\lim\limits_{x\to a}v(x)=v(a)$ 成立. 因此, $f(x)$ 连续等价于取实数值 x 的两个函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 同时连续.

2.3 指数函数和对数函数

在本节, 我们将对在高中数学中学过的指数函数和对数函数进行严格的论述.

a) n 次方根, 有理指数的乘方

正实数全体集合用 $\mathbf{R}^+$ 来表示, 即 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$. 当 n 取自然数时, $f(x)=x^n$ 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的连续单调递增函数. 根据定理 2.6, f 的值域 $f(\mathbf{R}^+)$ 是一个区间, 显然 $f(\mathbf{R}^+)\subset\mathbf{R}^+$. 又若 $x<1$, 那么 $x^n\leqslant x$; 若 $x>1$, 那么 $x^n\geqslant x$, 因此 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 所以 $f(\mathbf{R}^+)=\mathbf{R}^+$. 因此根据定理 2.7, f 的反函数 f^{-1} 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的连续单调递增函数. 对实数 $x\in\mathbf{R}^+$, 把 $f^{-1}(x)$ 叫做 x 的 **n次方根**, 记为 $x^{1/n}$ 或 $\sqrt[n]{x}$. 因为 $f^{-1}(\mathbf{R}^+)=\mathbf{R}^+$, 所以 $\lim\limits_{x\to+0}x^{1/n}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/n}=+\infty$.

于是, 验证了正实数 x 的 n 次方根 $x^{1/n}$ 的存在性. 基于此, 对有理数 $r=q/n,n$ 为自然数, q 为整数时, x 的 r 次方定义为

$$x^r=(x^q)^{1/n}.$$

x^r 又叫做 x 的**乘方**. 如果设 $p/m=q/n$, m 为自然数, p 为整数, 那么

$$((x^p)^{ym})^{mn}=x^{pn}=x^{qm}=((x^q)^{1/n})^{mn},$$

显然 x^r 不依赖于 r 的分数表示 q/n 的选择. x^r 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的 x 的连续函数. 对于任意两个分数 $r=p/m$, $s=q/n$, 因为

$$((x^{np+mq})^{1/mn})^{mn}=x^{np+mq}=x^{np}x^{mq}=((x^p)^{1/m}(x^q)^{1/n})^{mn},$$

所以 $(x^{r+s})^{mn}=(x^rx^s)^{mn}$, 因此

$$x^{n+s}=x^rx^s.$$

同理, 可得

$$(x^r)^s=(x^s)^r=x^{rs}.$$

对两个正实数 x,y, 同样可以验证下式

$$(xy)^r=x^ry^r$$

成立.

b) 指数函数

给定一个 $a>1$ 的正实数 a, 并且把 a^r 看成定义在 $\mathbf{Q}$ 上的 r 的函数. 因为 $x^{1/n}$ 是 x 的单调递增函数, 所以若分数 $r=q/n$ 是正数, 则 $x^r=(x^q)^{1/n}$ 也是 x 的单调递增函数. 因此, 若 $r>0$, 则 $a^r>1^r=1$. 所以当 $r>s$ 时,

$$a^r-a^s=a^s(a^{r-s}-1)>0.$$

即 a^r 是 r 的单调递增函数. 从而 $\{a^{1/n}\}$ 是单调递减数列, 并且 $a^{1/n}>1$. 因此 $\{a^{1/n}\}$ 有下界. 所以根据定理 (1.20) 的 (2), 数列 $\{a^{1/n}\}$ 收敛于其下确界 α. 虽然 $\alpha\geqslant 1$, 但对于所有的 n, 因为 $a^{1/n}>\alpha$, 所以 $a>\alpha^n$. 若 $\alpha>1$, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=+\infty$, 产生矛盾. 例如, 根据二项式定理,

$$\alpha^n=(1+(\alpha-1))^n=1+\binom{n}{1}(\alpha-1)+\cdots\geqslant 1+n(\alpha+1),$$

因此, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=+\infty$. 所以 $\alpha=1$, 即

$$\lim_{n\to\infty}a^{1/n}=1. \tag{2.5}$$

为了把定义在 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ 上的单调递增函数 a^r 扩展为定义在 $\mathbf{R}$ 全体上的函数, 对无理数 ξ, 定义 a^ξ 为有上界的集合 $\{a^r|r<\xi,r\in\mathbf{Q}\}$ 的上确界:

$$a^\xi=\sup_{r<\xi,r\in\mathbf{Q}}a^r.$$

这样在 $\mathbf{R}$ 全体上定义的 x 的函数a^x 是连续单调递增的函数. 要验证这一点, 我们用 x,y 表示实数, r,s 表示有理数, ξ,η 表示无理数. 若 $r<\xi$, 则存在满足 $r<s<\xi$ 的 s, 所以 $a^r<a^s\leqslant a^\xi$. 若 $\xi<r$, 则存在满足 $\xi<s<r$ 的 s, 所以 $a^\xi\leqslant a^s<a^r$. 若 $\xi<\eta$, 则存在满足 $\xi<r<\eta$ 的 r, 所以, $a^\xi<a^r<a^\eta$. 于是, a^x 是 x 的单调递增函数.

对给定的一个实数 β, 如果 $s<r<\beta$, 那么

$$a^r-a^s=a^s(a^{r-s}-1)<a^\beta(a^{r-s}-1).$$

任意给定正实数 ε, 根据 (2.5) 式, 存在自然数 n 使得 $\alpha^\beta(\alpha^{1/n}-1)<\varepsilon$ 成立. 取其中一个设为 $n(\varepsilon)$, 并设 $\delta(\varepsilon)=1/n(\varepsilon)$, 若当 $s<r<\beta$, $r-s<\delta(\varepsilon)$ 时,

$$a^r-a^s<a^\beta(a^{r-s}-1)<a^\beta(a^{\delta(\varepsilon)}-1)<\varepsilon.$$

如果 $y<x<\beta$, $x-y<\delta(\varepsilon)$, 那么存在满足 $s<y<x<r<\beta$, $r-s<\delta(\varepsilon)$ 的 r, s, 所以

$$a^x-a^y<a^r-a^s<\varepsilon.$$

即, 只要 $|x-y|<\delta(\varepsilon)$, $x<\beta$, $y<\beta$, 就有 $|a^x-a^y|<\varepsilon$ 成立. 这表示 x 的函数 a^x 在区间 $(-\infty,\beta)$ 上一致连续, 由于 β 是任意实数. 所以 a^x 在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上连续.

于是, 当 $a>1$ 时, 对于任意实数 x, 我们已经定义了 a^x, 但当 $a=1$ 时, 定义 $1^x=1$; 当 $0<a<1$ 时, 定义 $a^x=(1/a)^{-x}$. 当 x 等于有理数 r 时, 因为 $(1/a)^{-r}=(a^{-1})^{-r}=a^r$, 所以此新定义的 a^x 与原来的 a^r 是一致的. 当 a 是不等于 1 的正实数时, 把 a^x 叫做以 a 为**底**(base) 的**指数函数**(exponential function).

如上所证明, 当 $a>1$ 时, 指数函数 a^x 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的 x 的连续单调递增函数. 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-n}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$. 因此, 根据定理 2.6, a^x 的值域是$\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$. 当 $0<a<1$ 时, $a^x=(1/a)^{-x}$ 是定义在$\mathbf{R}$上的连续单调递减函数, 其值域是$\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$.

对于任意的实数 x,y, 如果 $\{r_m\}$, $\{s_n\}$ 分别是收敛于 x,y 的有理数列,

$$(a^{r_m})^{s_n}=a^{r_ms_n}.$$

因此 a^x 是 x 的连续函数, 所以,

$$(a^x)^{s_n}=\lim_{m\to\infty}(a^{r_m})^{s_n}=\lim_{m\to\infty}a^{r_ms_n}=a^{xs_n},$$
$$(a^x)^y=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{s_n}=\lim_{n\to\infty}a^{xs_n}=a^{xy}.$$

即

$$(a^x)^y=(a^y)^x=a^{xy}.$$

同理可以验证

$$a^{x+y}=a^xa^y,\qquad (ab)^x=a^xb^x.$$

从而 $a^x=(a/b)^x b^x$, 所以

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}.$$

正实数α 给定时, x^α 是定义在$\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$ 上的x 的连续单调递增函数. 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha=0$.

[证明] 设 r,s 是满足 $r<\alpha<s$ 的有理数, 当 $x>1$ 时, $x^r<x^\alpha<x^s$, 当 $x<1$ 时, $x^r>x^\alpha>x^s$, 并且 x^s 是 x 的连续函数, 因此 $\lim\limits_{x\to 1} x^r=1$, $\lim\limits_{x\to 1} x^s=1$. 所以,

$$\lim_{x\to 1} x^\alpha=1.$$

于是, 对任意的 $a\in\mathbf{R}^+$,

$$\lim_{x\to a} x^\alpha=a^\alpha\lim_{x\to a}\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha=a^\alpha,$$

即函数 x^α 在 $\mathbf{R}^+$ 的各点 a 处连续. 因此, x^α 是 $\mathbf{R}^+$ 上 x 的连续函数.

当 $x>1$ 时, $x^\alpha>x^0=1$, 当 $x<y$ 时, $y^\alpha/x^\alpha=(y/x)^\alpha>1$, 因此, $x^\alpha<y^\alpha$. 即 x^α 是 x 的单调递增函数. 另一方面, 对于任意 $\xi\in\mathbf{R}^+$, 令 $x=\xi^{1/\alpha}$, 则 $x^\alpha=\xi$, 函数 x^α 的值域 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$. 所以, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha=0$. □

当α 为负实数时, $x^\alpha=1/x^{-\alpha}$ 是定义在$\mathbf{R}^+$ 上的x 的单调递减函数, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha=+\infty$.

把 x 的函数 x^α 叫做**幂函数**

例 2.8 设 a,k 为 $a>1$, $k>0$ 的实数时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty. \tag{2.6}$$

这是 1.5 节例 1.2 的扩展.

[证明] 若令 $b=a^{1/k}$, 则 $b>1$, 并且 $a^x/x^k=(b^x/x)^k$. 所以只须证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x/x=+\infty$ 即可. 对于 x, 设 n 是满足 $n\leqslant x<n+1$ 的自然数, 则 $b^{x-n}\geqslant b^0=1$, 所以

$$\frac{b^x}{x}=\frac{b^n}{n}\cdot\frac{nb^{x-n}}{x}\geqslant\frac{b^n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

故当 $x\to+\infty$ 时, $n\to+\infty$. 又根据 1.5 节例 1.2, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b^n/n=+\infty$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x/x=+\infty$. □

以 $\mathrm{e}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}1/n!$ 为底的指数函数 e^x 是重要的函数. 不指定底时所说的指数函数, 一般都是指以 e 为底的指数函数 e^x. e^x 表示为

$$\mathrm{e}^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{2.7}$$

要证明这个结论, 首先证明

$$e=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \tag{2.8}$$

成立. 根据 (1.17) 式

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

对于 t, 取满足 $n\leqslant t<n+1$ 的自然数 n, 则

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{t}\right)^t<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

当 $t\to+\infty$ 时, $n\to+\infty$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,$$

同理

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e.$$

所以, $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+1/t)^t=e$. 其次, 验证

$$e=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}. \tag{2.9}$$

若设 $(1-1/t)^{-1}=1+1/s$, 则通过简单计算可得 $s=t-1$. 所以, 当 $t\to+\infty$ 时, $s\to+\infty$. 因此,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s+1}=e.$$

于是, 当 $x>0$ 时, 若令 $s=tx$, 因为指数函数 u^x 是 u 的连续函数, 所以

$$e^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{tx}=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{x}{s}\right)^s=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

当 $x<0$ 时, 若令 $x=-y,\ s=ty$, 则 $1/t=y/s$. 因此

$$e^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-tx}=\lim_{s\to+\infty}\left(1-\frac{y}{s}\right)^s=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

所以 (2.7) 式成立.

根据 (2.7) 式和 (1.23) 式, 可得指数函数的幂级数表示:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{2.10}$$

对它进行扩展, 对于任意的复数 z, 利用等式 (1.23), 把 "e 的 z 次方" 定义为

$$\mathrm{e}^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{2.11}$$

c) 对数函数

给定一个正实数 $a, a \neq 1$, 指数函数 $f(x) = a^x$ 是定义在 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 上的连续单调函数, 其值域 $f(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$. 所以, 根据定理 2.7, f 的反函数 f^{-1} 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的连续单调函数. 我们把这个反函数 $f^{-1}(x)$ 用 $\log_a x$ 来表示, 把它叫做以 a 为**底**(base) 的**对数函数**(logarithmic function). $\log_a x$ 在 $a > 1$ 时是单调递增的, 在 $0 < a < 1$ 时是单调递减, 其值域是 $\mathbf{R}$.

根据定义, 等式 $\log_a x = \xi$ 与 $x = a^\xi$ 等价. 由此, 我们可以导出高中学过的下列公式:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$
$$\log_a\left(\frac{y}{x}\right) = \log_a y - \log_a x,$$
$$\log_a(x^\lambda) = \lambda\log_a x, \quad \lambda\in\mathbf{R}.$$

若 $\log_a x = \xi$, 则 $x = a^\xi$. 若两边都取以 b 为底的对数, 则 $\log_b x = \xi\log_b a$, 即

$$\log_b x = \log_b a\cdot\log_a x. \tag{2.12}$$

以 $\mathrm{e} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/n!$ 为底的对数 $\log_\mathrm{e} x$ 叫做**自然对数**. 自然对数 $\log_\mathrm{e} x$ 可以省略底 e, 简写成 $\ln x$. $\ln x$ 是 x 的单调递增函数, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$.

例 2.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} x/\ln x = +\infty$.

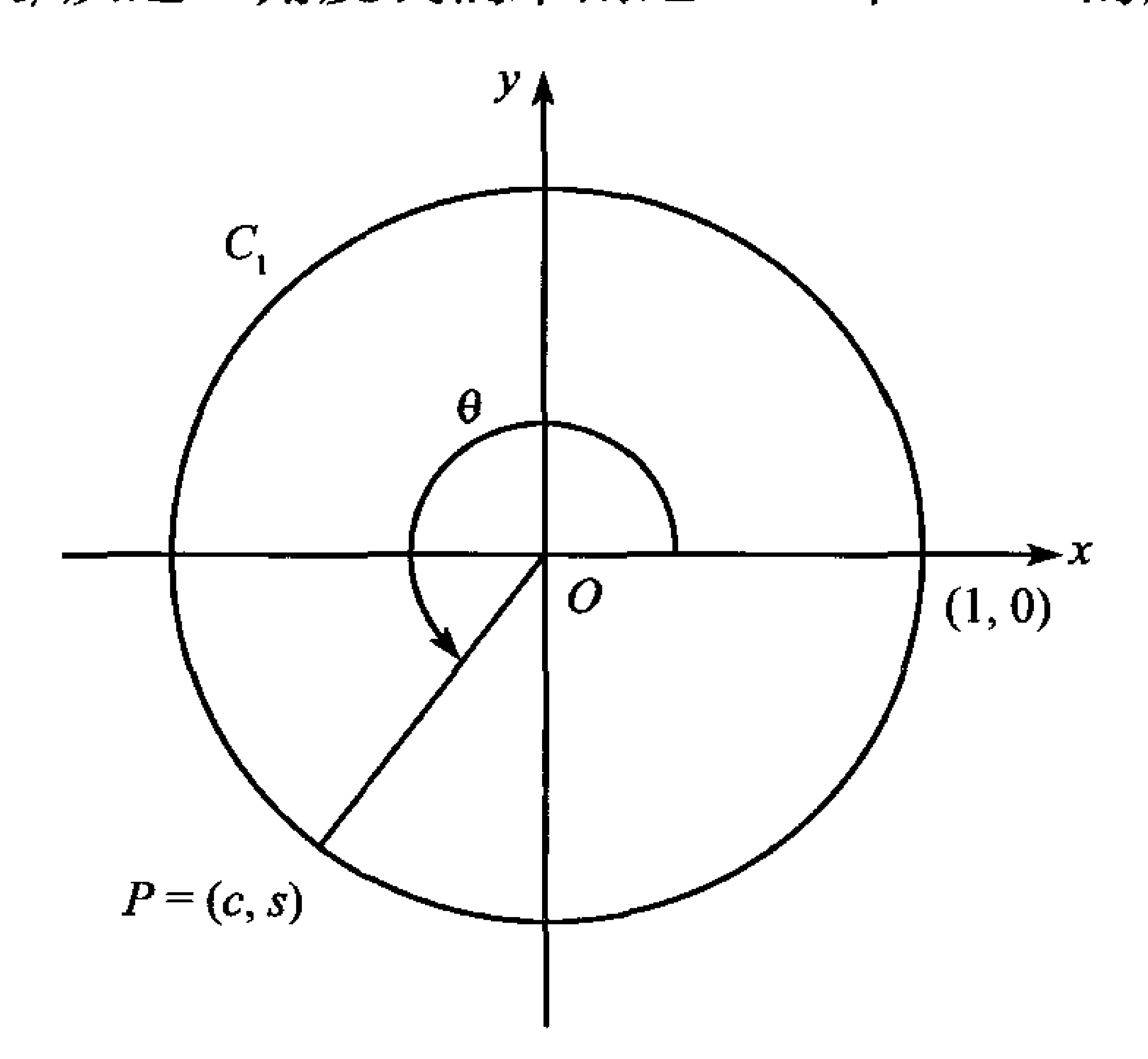
[证明] 根据例 2.8, 因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^t/t = +\infty$, 若令 $x = \mathrm{e}^t$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty.$$ □

2.4 三角函数

我们在高中数学中已经学过, 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上, 以原点 $O = (0,0)$ 为中心, 以 1 为半径, 画一个圆周 C_1, 在 C_1 上取一个点 $P = (c, s)$, 如果半径 OP 与 x 轴的正方向所成的角为 θ, 那么点 P 的坐标 c, s 分别表示为 $c = \cos\theta, s = \sin\theta$, 我们把 $\sin\theta$ 叫做 θ 的正弦 (sine), 把 $\cos\theta$ 叫做 θ 的余弦 (cosine). 我们在尝试着给 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 以明确定义时, 遇到的最大的困难就是角的定义. 在高中数学中, 角的概念是我们从小学以来自然而然地体会到的, 但通过分析, 明确地阐述它并不是一件容易的事

(关于角的严格的处理, 请参考弥永昌吉的《几何学序说》). 在本节中, 角 θ 是表示平面的旋转量的实数, 从这一角度我们来阐述 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的严格定义.



考察准备 如在高中学过的, 矩阵 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 确定的一次变换:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

是以平面 $\mathbf{R}^2$ 上原点 O 为中心的角 θ 的旋转. 若 $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\iota = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta + \iota\sin\theta,$$

因此可得

$$\iota^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

所以, 代数上可以看作 $\iota = i = \sqrt{-1}$. 与此对应, 把 $\mathbf{R}^2$ 看作复平面 $\mathbf{C}$, 若设 $e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, 则

$$x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y,$$
$$y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y,$$

所以

$$z' = e(\theta) \cdot x + ie(\theta) \cdot y = e(\theta) \cdot z,$$

即, 旋转 (2.13) 式可以表示为

$$z \to z' = e(\theta) \cdot z.$$

在这里, $|e(\theta)|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

a) 平面的旋转

虽然在上面我们把 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 作为已知, 旋转表示成了 $z \to z' = e(\theta) \cdot z$, 但是我们的目的就是为了重新对 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 进行严格的定义. 让我们暂时忘掉 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$, 对绝对值等于 1 的任意复数 $e = c + is$, $|e|^2 = c^2 + s^2 = 1$, 可以把 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的变换:

$$R_e : z \to z' = e \cdot z \tag{2.14}$$

定义为*以O 为中心的复平面$\mathbf{C}$ 的旋转*. 变换 R_e 实际上也具有 "旋转" 的性质, 这很容易进行验证. 首先 $0 = e \cdot 0$, 即 R_e 不变动原点 O. 若 $z' = e \cdot z$, $w' = e \cdot w$, 则 $|z' - w'| = |z - w|$, 即 R_e 不改变 $\mathbf{C}$ 上两点的距离. 若 $z' = e \cdot z$, 则 $|z'| = |z|$, 即把 C 作为以 O 为中心的任意的圆周时, R_e 是把 C 上的点 z 移动到 C 上的点 z'. 并且此时, 若 C 的半径为 r, 则 $|z - z'| = |e - 1|r$, 即 z' 与 z 的距离仅由 C 决定, 而不依赖于 C 上的点 z 的位置.

如果合成二次旋转后的 R_e 与 R_f, 则

$$R_f \circ R_e = R_{fe}$$

成立. 这显然由 "若 $z' = e \cdot z$, $z'' = f \cdot z'$, 则 $z'' = fe \cdot z$" 可得.

为了使 "旋转的量用称为角的实数来表示, 对应于任意的实数 θ, 存在角 θ 的旋转 $R_{e(\theta)} : z \to z' = e(\theta) \cdot z$", 首先必须存在一个关于 θ 的定义在数轴 R 上的绝对值为 1 的复数值函数 $e(\theta)$. 若说 "θ 表示旋转 $R_{e(\theta)}$ 的量", 则对应两个实数 θ, φ 的和 $\theta + \varphi$ 的旋转 $R_{e(\theta+\varphi)}$ 必定是 $R_{e(\theta)}$ 与 $R_{e(\varphi)}$ 的合成: $R_{e(\theta)} \circ R_{e(\varphi)}$. 即

$$R_{e(\theta+\varphi)} = R_{e(\theta)} \circ R_{e(\varphi)}.$$

对于函数 $e(\theta)$, 因为 $R_{e(\theta)}\circ R_{e(\varphi)}=R_{e(\theta)e(\varphi)}$, 所以必有

$$e(\theta+\varphi)=e(\theta)e(\varphi).$$

又对任意的旋转 R_e, 当 "其角度" 设为 θ 时, 应表示为 $R_e=R_{e(\theta)}$, 所以函数 $e(\theta)$ 的值域必定是单位圆周: $\{e\in\mathbf{C}||e|=1\}$. 进而, $e(\theta)$ 必然是 θ 的连续函数.

反之, 设 $e(\theta)$ 是以 $\mathbf{R}$ 为定义域, 以 $\{e\in\mathbf{C}||e|=1\}$ 为值域的连续函数, 若存在满足以下条件

$$e(\theta+\varphi)=e(\theta)\cdot e(\varphi),\quad \theta\in\mathbf{R},\quad \varphi\in\mathbf{R} \tag{2.15}$$

的 $e(\theta)$, 则我们把 $R_{e(\theta)}:z\to z'=e(\theta)\cdot z$ 定义为角 θ 的旋转.

暂且假设存在这样的实数 $e(\theta)$, 那么 $e(\theta)$ 是个什么形式的函数呢? 首先, 在 (2.15) 式中, 若令 $\varphi=0$, 则 $e(\theta)=e(\theta)\cdot e(0)$, 所以,

$$e(0)=1.$$

又, 若令 $\varphi=-\theta$, 则 $1=e(0)=e(\theta)\cdot e(-\theta)$, 所以

$$e(-\theta)=\frac{1}{e(\theta)}=\overline{e(\theta)}. \tag{2.16}$$

其次, 对任意的自然数 n, 根据 (2.15) 式, 可得 $e(n\theta)=e(\theta)\cdot e((n-1)\theta)$, 所以

$$e(n\theta)=e(\theta)^n, \tag{2.17}$$

因此,

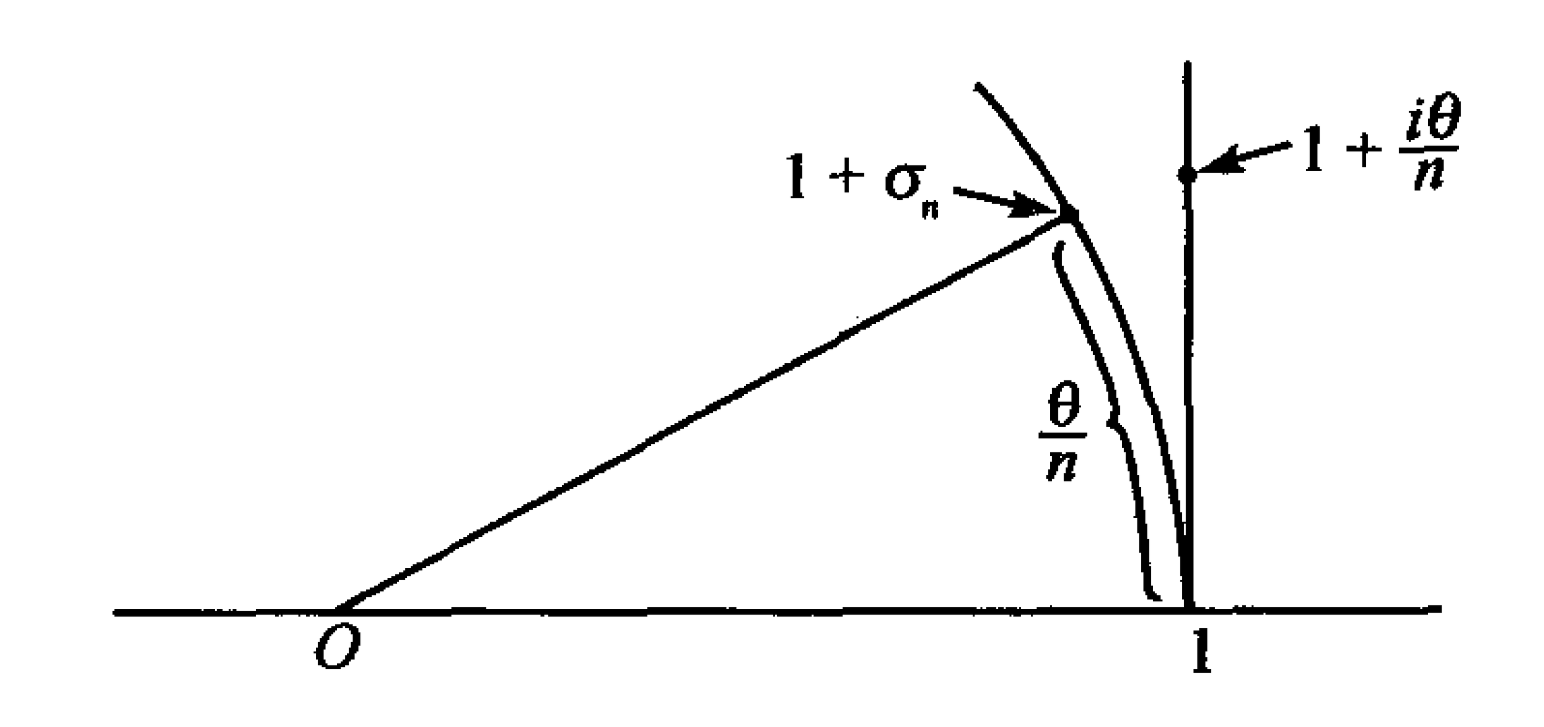
$$e(\theta)=e\left(\frac{\theta}{n}\right)^n.$$

因为 $e(\theta)$ 是 θ 的连续函数, 并且 $e(0)=1$, 所以只要给定一个实数 θ, $\theta\neq 0$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}e(\theta/n)=1$, 因此, 若令

$$e\left(\frac{\theta}{n}\right)=1+\sigma_n,$$

则

$$e(\theta)=(1+\sigma_n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+\sigma_n)^n,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=0.$$



如果对于一个非常大的自然数 n, 把它很微小的旋转 $e(\theta/n)$ 的旋转量 θ/n 用圆弧 $\widehat{1e(\theta/n)}$ 的长度来测量, 虽然"圆弧的长度"尚未定义, 但 σ_n 大致等于 $i\theta/n$. 即考虑为

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(i\theta + \tau_n), \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = 0,$$

因此, 我们可以很容易得出下式

$$e(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\theta}{n} + \frac{\tau_n}{n}\right)^n.$$

引理 2.1 对于复数列 $\{z_n\}$, 如果 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = 1$.

证明 因为 $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!}$, 所以, 根据二项定理可得

$$\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|z_n|^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^{|z_n|} - 1.$$

根据假设, $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 0$, 所以 $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{|z_n|}-1) = 0$. 因此, $\lim_{n\to\infty}(1+z_n/n)^n = 1$. □

因为

$$1 + \frac{i\theta}{n} + \frac{\tau_n}{n} = \left(1+\frac{i\theta}{n}\right)\left(1+\frac{z_n}{n}\right), \quad z_n = \frac{\tau_n}{1+\dfrac{i\theta}{n}},$$

并且 $\lim_{n\to\infty}\tau_n = 0$, 因此 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. 所以根据引理 2.1,

$$e(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n.$$

这样, 函数 $e(\theta)$ 具有如下形式

$$e(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n.$$

于是, 基于这种想法, 把 $e(\theta)$ 重新定义为

$$e(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n, \tag{2.18}$$

下面证明这个 $e(\theta)$ 是绝对值为1 的关于 θ 的复值连续函数并且满足条件(2.15) 式. 事实上, 我们已经在 (1.23) 中证明了 (2.18) 式右边的极限的存在性, 首先, 根据引理 2.1,

$$|e(\theta)|^2 = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{i\theta}{n}\right|^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta^2}{n^2}\right)^n = 1.$$

其次, 因为

$$e(\theta)e(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n,$$

若令 $\psi=\theta+\varphi$, 则

$$\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)=1+\frac{i\psi}{n}-\frac{\theta\varphi}{n^2}=\left(1+\frac{i\psi}{n}\right)\left(1+\frac{z_n}{n}\right),$$

这里, $z_n=-\theta\varphi/n(1+i\psi/n)$. 根据引理 2.1, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+z_n/n)^n=1$, 所以

$$e(\theta)e(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\psi}{n}\right)^n=e(\psi)=e(\theta+\varphi).$$

即函数 $e(\theta)$ 满足条件 (2.15) 式. 要证明 $e(\theta)$ 是 θ 的连续函数, 根据 (2.15) 式可得

$$|e(\theta)-e(\varphi)|=|e(\varphi)(e(\theta-\varphi)-1)|=|e(\theta-\varphi)-1|,$$

所以, 只须证明

$$\lim_{\theta\to0}|e(\theta)-1|=0$$

成立. 根据 (1.23) 式,

$$e(\theta)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=1+\frac{i\theta}{1!}-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots,\tag{2.19}$$

所以, 若令 $|\theta|<1$, 那么

$$|e(\theta)-1|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\theta|^n}{n!}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\theta|^n=\frac{|\theta|}{1-|\theta|}.$$

因此, $\lim\limits_{\theta\to0}|e(\theta)-1|=0$, 所以 $e(\theta)$ 是 θ 的连续函数.

$e(\theta)$ 的实数部表示为 $c(\theta)$, 虚数部表示为 $s(\theta)$, 即

$$e(\theta)=c(\theta)+is(\theta),$$

$c(\theta)$ 和 $s(\theta)$ 是 θ 的连续函数, 并且 $c(\theta)^2+s(\theta)^2=1$, $c(0)=1, s(0)=0$, (2.15) 式成为

$$\begin{cases}c(\theta+\varphi)=c(\theta)c(\varphi)-s(\theta)s(\varphi),\\ s(\theta+\varphi)=c(\theta)s(\varphi)+s(\theta)c(\varphi).\end{cases}\tag{2.20}$$

根据 (2.19) 式

$$\begin{cases}c(\theta)=1-\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{\theta^4}{4!}-\dfrac{\theta^6}{6!}+\cdots,\\ s(\theta)=\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{\theta^5}{5!}-\dfrac{\theta^7}{7!}+\cdots.\end{cases}\tag{2.21}$$

当 $0<\theta\leqslant 1$ 时, $\{\theta^{2n}/(2n)!\}$ 是收敛于 0 的单调递减数列, 所以根据定理 1.23,

$$c(\theta)\geqslant 1-\frac{\theta^2}{2!}\geqslant\frac{1}{2}.$$

同理, 当 $0<\theta\leqslant 1$ 时, 则

$$s(\theta)\geqslant\theta-\frac{\theta^3}{3!}=\theta\Big(1-\frac{\theta^2}{6}\Big)\geqslant\frac{5}{6}\theta.$$

当 $0\leqslant\varphi<\psi\leqslant 1$ 时, 若令 $\theta=\psi-\varphi$, 则 $s(\theta)\geqslant 5\theta/6>0, c(\theta)=\sqrt{1-s(\theta)^2}<1$, $c(\varphi)\geqslant 1/2, s(\varphi)\geqslant 0$. 所以根据 (2.20) 式,

$$c(\varphi)-c(\psi)=c(\varphi)-c(\theta)c(\varphi)+s(\theta)s(\varphi)>0.$$

即, $c(\theta)$ 在闭区间 [0,1] 上是 θ 的单调递减函数. 因此 $s(\theta)=\sqrt{1-c(\theta)^2}$ 是单调递增函数. 因为 $((1+i)/\sqrt{2})^2=i$, 所以令

$$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

因为 $s(0)=0, s(1)\geqslant 5/6>1/\sqrt{2}$, 所以根据中值定理 (定理 2.22), 存在唯一的满足条件 $s(\gamma)=1/\sqrt{2}$ 的实数 γ, $0<\gamma<1$. 这个实数的 4 倍用 π 表示: $\pi=4\gamma$. 这是从我们的立场给出的π 的定义. 我们将在后面证明 2π 等于半径为 1 的圆周的长度. 因为 $\gamma=\pi/4, s(\pi/4)=1/\sqrt{2}$, 因此 $c(\pi/4)=1/\sqrt{2}$, 从而

$$e\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=\sqrt{i}.$$

在闭区间 $[0,\pi/4]$ 上, $s(\theta)$ 单调递增, $c(\theta)$ 单调递减, 并且 $s(0)=0$, $s(\pi/4)=1/\sqrt{2}, c(0)=1$, $c(\pi/4)=1/\sqrt{2}$.

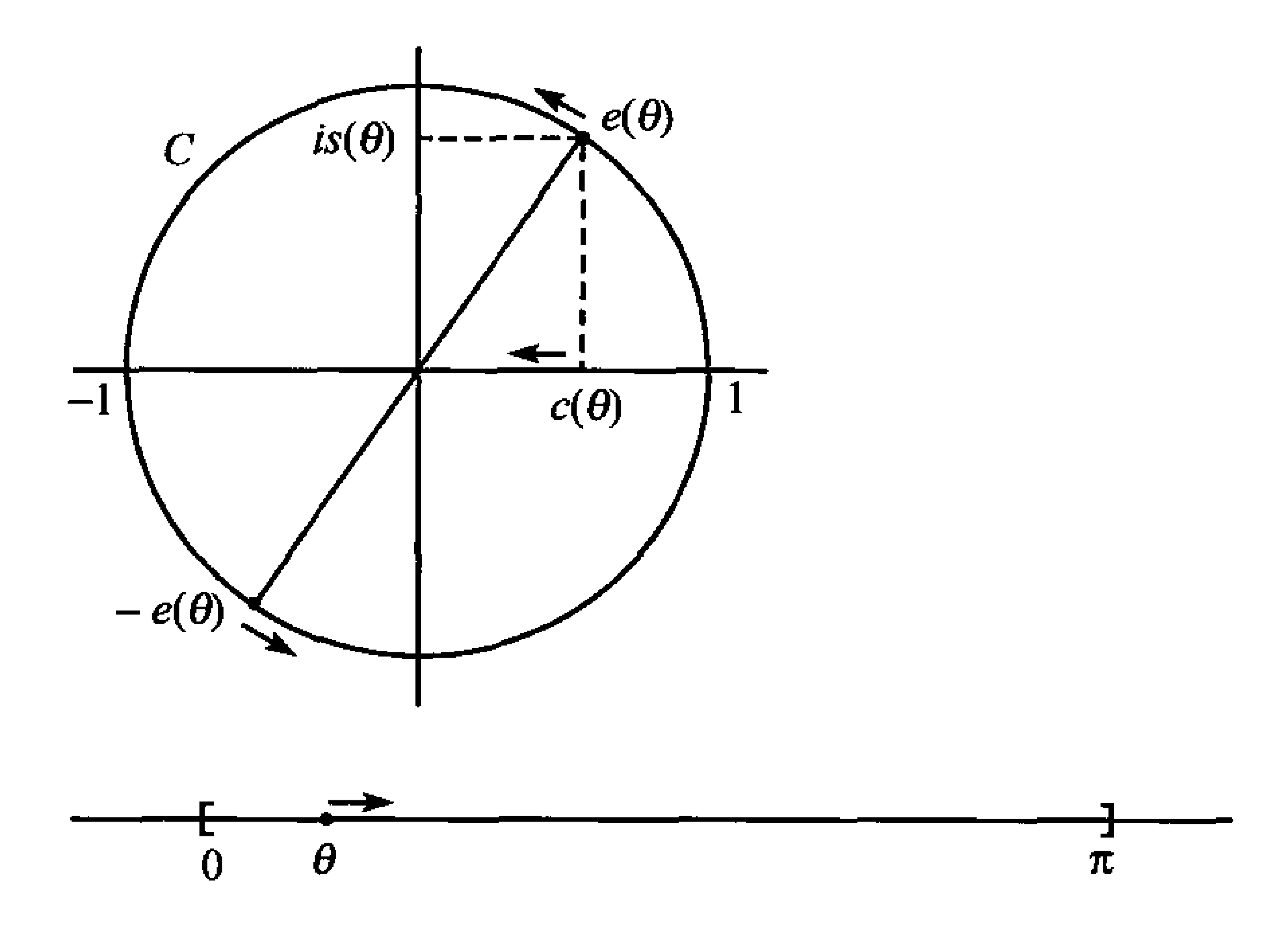
当 $\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 时, 若令 $\varphi=\theta-\pi/4$, 则根据 (2.20) 式,

$$c(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(c(\varphi)-s(\varphi)),\qquad s(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(c(\varphi)+s(\varphi)).$$

因此 $c(\theta)$ 在闭区间 $[\pi/4,\pi/2]$ 上单调递减, 并且 $c(\pi/2)=0$; $s(\theta)=\sqrt{1-c(\theta)^2}$ 是单调递增的, 并且 $s(\pi/2)=1$. 所以, 在闭区间 $[0,\pi/2]$ 上, $c(\theta)$ 单调递减, 并且 $c(0)=1$, $c(\pi/2)=0$; $s(\theta)$ 单调递增, 并且 $s(0)=0, s(\pi/2)=1$. 当 $\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时, 根据 (2.20) 式,

$$c(\theta) = -s\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \qquad s(\theta) = c\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

所以, 在闭区间 $[\pi/2, \pi]$ 上, $c(\theta)$ 和 $s(\theta)$ 都是单调递减函数, 并且 $c(\pi) = -1, s(\pi) = 0$.



结果, 在闭区间 $[0, \pi]$ 上, $c(\theta)$ 单调递减, 并且 $c(0) = 1$, $c(\pi) = -1$, 在开区间 $(0, \pi)$ 上, $s(\theta) > 0$. 因此, 点 θ 在闭区间 $[0, \pi]$ 上从 0 到 π 向右移动时, 即

$$e(\theta) = c(\theta) + is(\theta)$$

是把单位圆周 $C = \{e \in \mathbf{C} | |e| = 1\}$ 的上半部分沿着逆时针方向, 从 1 移到 -1. 在闭区间 $[\pi, 2\pi]$ 上是

$$e(\theta) = e(\pi)e(\theta - \pi) = e(\theta - \pi)$$

即点 θ 在从 π 到 2π 向右移动时, $e(\theta)$ 是把 C 的下半部分, 从 -1 移到 1. 所以对应的 $\theta \to e(\theta)$ 给出了区间 $[0, 2\pi)$ 与圆周 C 之间的一一对应. 因此, 函数 $e(\theta)$ 的值域是 C. 又 $e(\theta) = 1$ 成立的最小正实数 θ 是 2π. 对于任意的整数 m, 因为 $e(2m\pi) = e(2\pi)^m = 1$, 所以,

$$e(\theta + 2m\pi) = e(\theta).$$

即 $e(\theta)$, 或 $c(\theta)$ 和 $e(\theta)$ 是以 2π 为周期的 θ 的周期函数.

b) 圆弧的长度

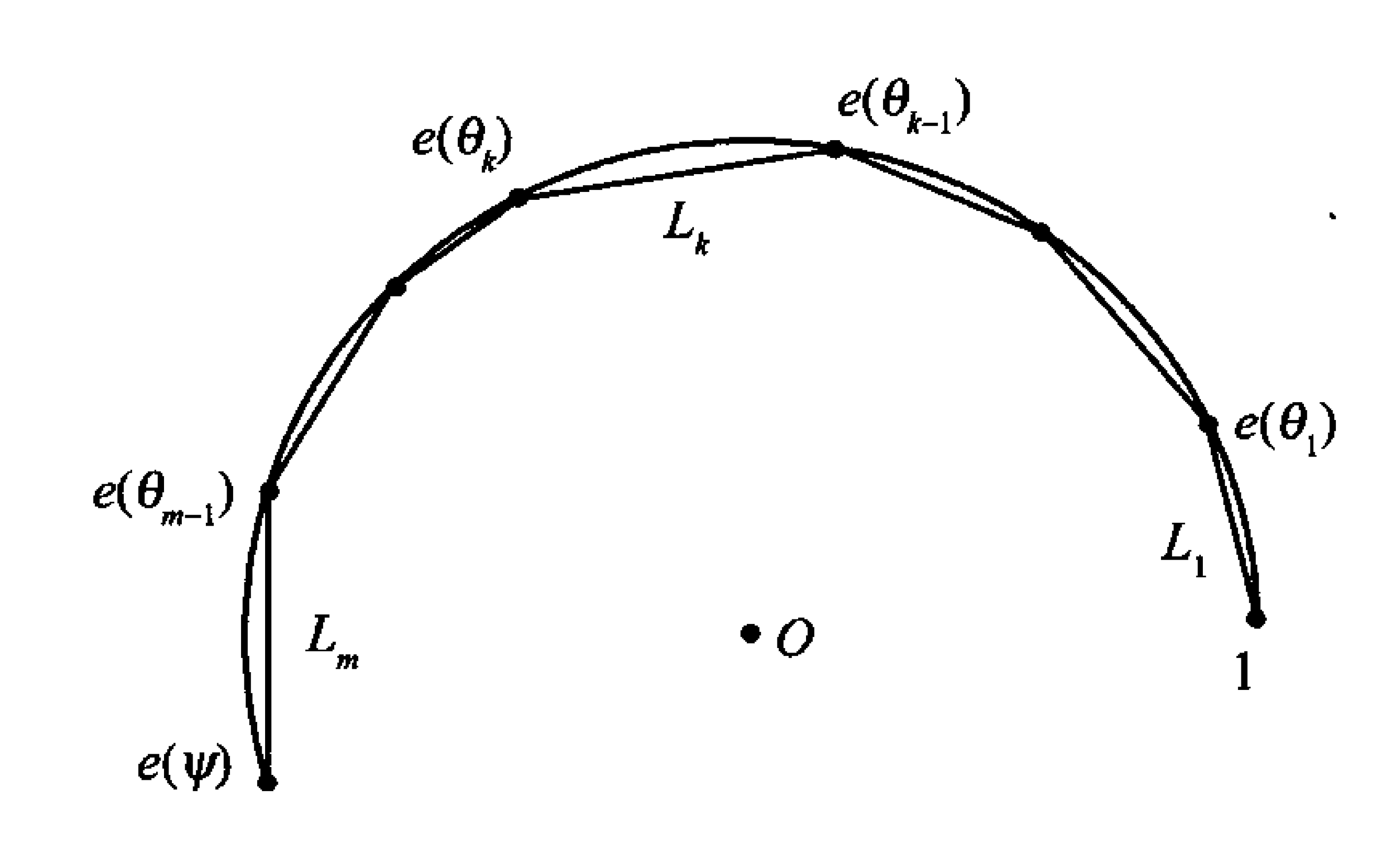
设 ψ 是满足条件 $0 < \psi \leqslant 2\pi$ 的实数, 把对应于闭区间 $[0, \psi]$ 的 C 的子集:

$$\overparen{1e(\psi)} = \{e(\theta) | 0 \leqslant \theta \leqslant \psi\}$$

叫做**圆弧**. 在此, 我们来证明 ψ 等于圆弧 $\overparen{1e(\psi)}$ 的长度. 为此, 首先必须定义**圆弧的长度**. 在区间 $[0, \psi]$ 内, 取满足条件

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{k-1} < \theta_k \cdots < \theta_m = \psi$$

的多个点 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_k,\cdots,\theta_m$, 在圆周 C 上把连接点 $e(\theta_k)$ 与 $e(\theta_{k-1})$ 的线段设为 L_k, L_k 的长度设为 l_k, 并且把 $L_1,L_2,\cdots,L_k,\cdots,L_m$ 顺次连接起来组成的折线设为 L, 则 L 的长度为 $l=\sum_{k=1}^{m} l_k$. 折线 L 的长度 l 由 $\Delta=\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_k,\cdots,\theta_m\}$ 而定. 所以把 l 写成 l_Δ. 如果 $\Delta\subseteq\Delta'$, 则显然有 $l_\Delta<l_{\Delta'}$. 把圆弧 $\overset{\frown}{1e(\psi)}$ 的长度定义为对应于所有选择方法 Δ 的 l_Δ 的上确界:



$$\overset{\frown}{1e(\psi)}\text{ 的长度}=\sup_{\Delta} l_\Delta.$$

在这个定义中, 变量 θ 只是为了指定圆弧 $\overset{\frown}{1e(\psi)}$ 上各点的顺序而采用的.

要证明 $\psi=\sup\limits_{\Delta} l_\Delta$, 只须说明对任意给定的正实数 ε, $\varepsilon<1$, 存在一个正实数 $\delta(\varepsilon)$, 只要

$$|\theta_k-\theta_{k-1}|<\delta(\varepsilon),\ k=1,2,\cdots m, \tag{2.22}$$

就有

$$|l_\Delta-\psi|<\varepsilon$$

成立即可. 事实上, 如果 $\Delta\subseteq\Delta'$, 那么 $l_\Delta\leqslant l_{\Delta'}$, 因此即使仅限于满足条件 (2.22) 式的 Δ, 上确界 $\sup\limits_{\Delta} l_\Delta$ 也不会改变. 所以,

$$|\sup_{\Delta} l_\Delta-\psi|\leqslant\varepsilon,$$

并且, 因为 ε 为任意的正实数, 所以 $\sup\limits_{\Delta} l_\Delta=\psi$.

因为 $e(\theta_k)-e(\theta_{k-1})=e(\theta_{k-1})(e(\theta_k-\theta_{k-1})-1)$, 所以

$$l_k=|e(\theta_k)-e(\theta_{k-1})|=|e(\theta_k-\theta_{k-1}-1)|.$$

于是, 以 $0<\theta<\delta<1$ 来看 $|e(\theta)-1|$, 根据 (2.19) 式,

$$e(\theta)-1=i\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!},$$

因此, 若令

$$e(\theta)-1=i\theta(1+\rho),$$

则

$$|\rho|=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{(n+1)!}\Big|<\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)^n=\frac{\theta}{2-\theta}<\delta.$$

所以,

$$\theta(1-\delta)<|e(\theta)-1|<\theta(1+\delta),$$

因此, $|\theta_k-\theta_{k-1}|<\delta, k=1,2,\cdots,m$, 那么

$$(\theta_k-\theta_{k-1})(1-\delta)<l_k<(\theta_k-\theta_{k-1})(1+\delta).$$

因为 $l_\Delta=\sum_{k=1}^{m}l_k,\ \psi=\sum_{k=1}^{m}(\theta_k-\theta_{k-1})$, 所以

$$\psi(1-\delta)<l_\Delta<\psi(1+\delta),$$

因此,

$$|l_\Delta-\psi|<\psi\delta\leqslant 2\pi\delta.$$

故, 若令 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2\pi$, 则当 Δ 满足条件 (2.22) 式时,

$$|l_\Delta-\psi|<\varepsilon.$$

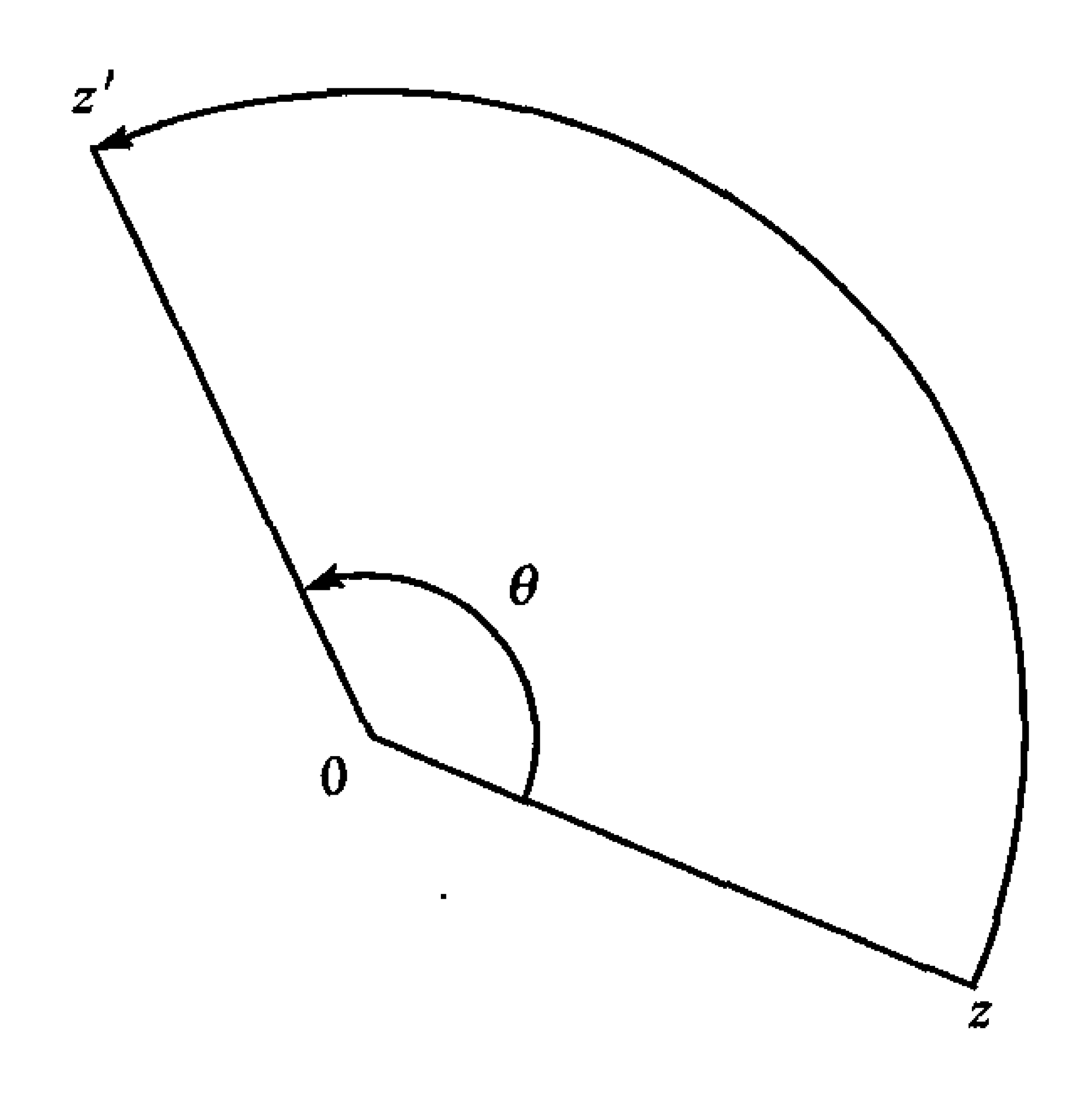
于是, ψ 等于圆弧 $\overset{\frown}{1e(\psi)}$ 的长度. 特别地, 这证明了 2π 等于半径为 1 的圆周C 的长度.

c) 三角函数

基于以上结果, 对于任意的实数 θ, 把变换

$$R_{e(\theta)}:z\to z'=e(\theta)z$$

定义为以平面原点 O 为中心的**角 θ 的旋转**, θ 叫做线段 $0z'$ 与 $0z$ 形成的角, $s(\theta)$ 叫做角 θ 的**正弦**, $c(\theta)$ 叫做角 θ 的**余弦**, 并且分别用 $\sin\theta,\cos\theta$ 来表示:



$$\sin\theta = s(\theta), \qquad \cos\theta = c(\theta).$$

至此, 我们严格地定义了三角函数 $\sin\theta, \cos\theta$. $\sin\theta, \cos\theta$ 的主要性质已经在上述定义的过程中证明了. 即 $\sin\theta, \cos\theta$ 是定义在数轴 $\mathbf{R}$ 上的 θ 的连续函数, 并且是以 2π 为周期的周期函数.

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

又根据 (2.16) 式, 因为 $e(-\theta) = \overline{e(\theta)}$, 所以

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

(2.20) 式即加法定理是:

$$\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi, \\ \sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.23}$$

若采用 (2.11) 式的记法, 则

$$c(\theta) + is(\theta) = e(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta},$$

所以

$$\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

进而

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots,$$
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots.$$

在 $0, \pi/2, -\pi/2, \pi$ 处, 分别取 $e(\theta)$ 的值为 $1, i, -i, -1$, $\sin\theta$ 的值为 $0, 1, -1, 0$, $\cos\theta$ 的值为 $1, 0, 0, -1$. 我们在高中数学中学过的 $\sin(\pi/2-\theta) = \cos\theta, \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$, 这些公式都可由加法定理直接推导获得.

在高中我们定义了 $\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta,\cot\theta=\cos\theta/\sin\theta$, 并且把 $\tan\theta$ 和 $\cot\theta$ 分别叫做正切 (tangent) 和余切 (cotangent). $\tan\theta$ 是定义在除去 $\cos\theta=0$ 的点 θ, 即 $\pi/2+m\pi$, m 为整数的数轴 $\mathbf{R}$ 上的连续函数. $\cot\theta$ 是定义在除去 $m\pi$, m 为整数的数轴 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

习 题

11. 证明 x 的函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是连续函数, 但不是一致连续函数.
12. 由有界数列具有收敛的子列 (定理 1.30), 证明在闭区间上定义的连续函数具有最大值和最小值 (定理 2.4).
13. 由有界数列具有收敛的子列, 证明在闭区间上定义的连续函数是一致连续函数 (定理 2.3).
14. 如果 x 的函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=l$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$.
15. 设 $f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上 x 的连续函数. 对于任意的 x,y, 若等式
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$
恒成立, 证明 $f(x)$ 是 x 的一次函数 (取 x 的一次函数 $g(x)=Ax+B$ 满足 $g(a)=f(a),g(b)=f(b)$. 然后证明在区间 $[a,b]$ 上某个处处稠密的子集上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致).
16. 设 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)$ 是 x 的多项式, 证明对于任意的实数 x, 使
$$P_0(x)e^{nx}+P_1(x)e^{(n-1)x}+\cdots+P_{n-1}(x)e^{x}+P_n(x)=0$$
成立仅限于恒等式 $P_0(x)=P_1(x)=\cdots=P_n(x)=0$ 成立 [利用 2.3 节的 (2.6) 式].
17. 对于数列 $\{a_n\},a_n>0$, 若 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=\alpha,\alpha>0$, 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(a_1a_2a_3\cdots a_n)^{1/n}=\alpha$ 成立.
18. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}$ 的值 $\left(\text{把}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\text{代入习题 17 的 } a_n \text{ 中}\right)$.
19. 证明 $a>0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)=\ln a$ 成立 (藤原松三郎的《微分積分学 I》p.120 例题 1).
20. 求用 $\cos x$ 和 $\sin x$ 表示的 $\cos(nx)$ 和 $\sin(nx)$(n 为自然数) 的公式.

第3章 微分法则

3.1 微分系数和导函数

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果 a 是区间 I 内的一点, 那么 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 是定义在区间 I 内除 a 以外的 x 点上的函数. 此时如果存在极限:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

那么就称 $f(x)$ 在 a 点处**可微**(differentiable), 或者称在 $x=a$ 处可微, 并称此极限为函数 $f(x)$ 在点 a 处的**微分系数**(differentiable coefficient), 记为 $f'(a)$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{3.1}$$

当函数 $f(x)$ 在所属区间内的任意点 x 均可微时, 则称函数 $f(x)$ 可微, 或称函数 $f(x)$ 关于 x 可微. 此时 $f'(x)$ 也是定义在区间 I 上的关于 x 的函数. 称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的**导函数**(derived function derivative), 求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$, 称为对函数 $f(x)$ **进行微分**, 或函数 $f(x)$ 关于 x **进行微分**. 在 (3.1) 式中如果用 x 替换 a, 用 $x+h$ 替换 x, 则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{3.2}$$

当 $y=f(x)$ 时, 用 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 表示 $f'(x)$. 有时也称 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 为**微商**(differentiable quotient). 令 $\Delta x=h, \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当自变量 x 增加 Δx 成为 $x+\Delta x$ 时, 相应地函数 y 也增加 Δy 成为 $y+\Delta y$. 因此把 Δx 和 Δy 分别称为 x 和 y 的**增量**(increment).

$f(x)$ 在 x 点可微时, 设

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon(h,x),$$

则 $\varepsilon(h,x)$ 是满足 $h\neq 0$ 的 h 的函数, 并且 $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h,x)=0$. 虽然 $\varepsilon(h,x)$ 是定义在 $h\neq 0$ 的 h 的函数, 但当 $h=0$ 时, 若定义 $\varepsilon(0,x)=0$, 则对所有的 h,

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\varepsilon(h,x)h, \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h,x)=0 \tag{3.3}$$

成立. 如果令函数 $y=f(x)$, 那么

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Delta x+\varepsilon(\Delta x,x)\Delta x.$$

一般地, 若 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=\alpha(0)=0$, 则称函数 $\alpha(x)$ 为**无穷小量**, 当 $\varepsilon(x)$, $\alpha(x)$ 是无穷小量时, 无穷小量 $\varepsilon(x)\alpha(x)$ 用符号 $o(\alpha(x))$ 表示, 即用小写字母 o 来代表 $\varepsilon(x)$. 在不关心函数 $\varepsilon(x)$ 的具体形式时, 用符号 $o(\alpha(x))$ 很方便. 如果使用这个符号, 那么上式为:

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Delta x+o(\Delta x), \tag{3.4}$$

上式 (3.3) 可写为:

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h). \tag{3.5}$$

如果用 a 替换 x, 用 x 替换 $x+h$, 那么

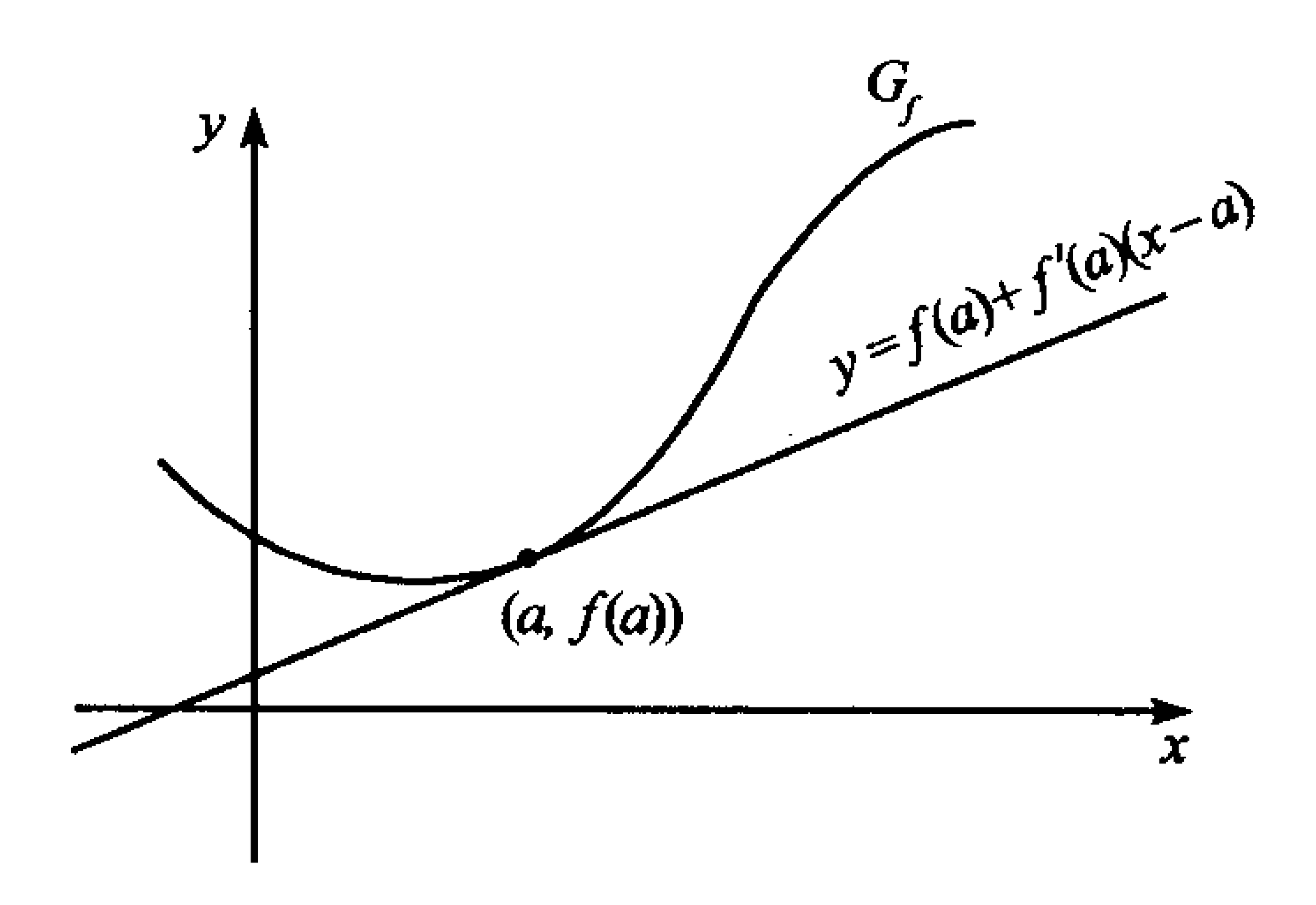
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a). \tag{3.6}$$

对在 a 点处可微的函数 $f(x)$, 把由线性方程式

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \tag{3.7}$$

确定的直线:

$$\{(x,y)|y=f(a)+f'(a)(x-a),x\in\mathbf{R}\}$$



称为定义在图像 $G_f=\{(x,f(x))|x\in I\}$ 上 $(a,f(a))$ 点处函数 $f(x)$ 的**切线**(tangent line). 在高中数学中, 也称它为在 $(a,f(a))$ 点处图像 G_f 的切线, 其方程式是 (3.7). 但在我们这里, 把方程式 (3.7) 所确定的直线定义为在 $(a,f(a))$ 点处 G_f 的切线.

表示函数 $y=f(x)$ 的微分系数的符号除 $f'(x)$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 之外, 还有 y', $\dot{y}$, $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)f(x)$ 和 $\mathrm{D}f(x)$ 等. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$ 的分母 $\mathrm{d}x$ 和分子 $\mathrm{d}y$ 分

别表示无穷小增量 Δx 和 Δy, 但在上述的定义中, $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 无意义. 为使 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 具有意义, 方法之一是, 定义函数 $y=f(x)$ 的**微分**(differential)$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)$ 为:

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x. \tag{3.8}$$

把微分 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$ 作为变量 x 和变量 Δx 双方的函数. 特别地, 当 x 看成 x 的函数时, 它的微分系数 $x'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x/\Delta x=1$, 即 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}=f'(x).$$

定理 3.1 如果函数 $f(x)$ 在 x 点可微, 那么函数 $f(x)$ 在 x 点连续.

证明 对于 $y=f(x)$, 由公式 (3.4) 可知, $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0$. 即 $f(x+\Delta x)-f(x)\to 0$, 因此 $f(x)$ 在点 x 处连续. □

在此证明中, x 点属于区间 I, $f(x)$ 中的 x 是变量. Δx 是与 x 无关的其他变量 h, 虽然开始容易混淆, 但是采用这些符号能够缩短数学公式, 非常简练、实用. 例如, Δx 表示 $x+h$ 中的 h, 而不是表示 $t+h$ 中的 h, 如果习惯的话是很方便的.

推论 定义在某区间上的可微函数在该区间上是连续函数.

根据定理 3.1, 如果 $f(x)$ 在 x 点可微, 那么 $f(x)$ 在 x 点连续, 但我们不能确定 $f(x)$ 在 x 以外点的连续性.

例 3.1 在区间 $(0,1)$ 上定义函数 $f(x)$ 如下: 当 x 为无理数时, $f(x)=0$; 当 x 为有理数时, $f(x)=1/p^3$, 其中 $x=q/p$ 为不可约分数 (既约分数), p 和 q 是互素的自然数. 显然, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的所有的有理点处都不连续. 如果 α 为区间 $(0,1)$ 内的无理数, 例如 $\alpha=b\sqrt{2}/a(a,b$ 为自然数), 那么函数 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 处可微.

[证明] 只须证明

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0.$$

首先对于既约分数 $x=q/p$, $0<q/p<1$, 从下式来估计 $|q/p-\alpha|$.

$$\left(\frac{q}{p}+\alpha\right)\left(\frac{q}{p}-\alpha\right)=\frac{q^2}{p^2}-\alpha^2=\frac{q^2}{p^2}-\frac{2b^2}{a^2},$$

则

$$a^2p^2\left(\frac{q}{p}+\alpha\right)\left(\frac{q}{p}-\alpha\right)=a^2q^2-2b^2p^2.$$

这个等式的左边不为 0, 右边为整数. 因此

$$a^2p^2\left(\frac{q}{p}+\alpha\right)\left|\frac{q}{p}-\alpha\right|\geqslant 1.$$

因为 q/p 和 α 介于 0 和 1 之间, 所以 $q/p+\alpha<2$, 因此

$$\left|\frac{q}{p}-\alpha\right|>\frac{1}{2a^2p^2}. \tag{3.9}$$

如果 $x, x\neq\alpha$ 为无理数, 那么根据函数 $f(x)$ 的定义显然有

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0,$$

所以令 x 是不可约分数, $x=q/p$, 于是

$$\frac{f(q/p)-f(\alpha)}{q/p-\alpha}=f\left(\frac{q}{p}\right)\Big/\left(\frac{q}{p}-\alpha\right)=\left(\frac{1}{p^3}\right)\Big/\left(\frac{q}{p}-\alpha\right),$$

因此根据 (3.9) 式,

$$\left|\frac{f(q/p)-f(\alpha)}{q/p-\alpha}\right|=\left(\frac{1}{p^3}\right)\Big/\left|\frac{q}{p}-\alpha\right|<\left(\frac{1}{p^3}\right)\Big/\frac{1}{(2a^2p^2)}=\frac{2a^2}{p}.$$

对于任意的正实数 M, 由于 $p<M$ 的不可约分数 $q/p(0<q/p<1)$ 仅有有限个, 所以当 $q/p\to\alpha$ 时, $p\to+\infty$, 因此, $2a^2/p\to 0$. 所以,

$$\lim_{\frac{q}{p}\to\alpha}\frac{f(q/p)-f(\alpha)}{q/p-\alpha}=0.$$

即 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 处可微, $f'(\alpha)=0$. □

显然无理点 α 稠密地分布在区间 $(0,1)$ 的各处. 因此, $f(x)$的不连续点和可微的点分别稠密地分布在区间 $(0,1)$ 的各处. 观察这些微妙的现象对掌握微分的准确含义是非常重要的.

微分系数的定义 $f'(a)\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)$ 中, 当 a 是 $f(x)$ 的定义域 I 的左端点, 例如 $I=[a,b]$ 时, 如 2.1 节所述, $\lim\limits_{x\to a}$ 当 x 从右向 a 接近时的极限记作 $\lim\limits_{x\to a+0}$, 所以,

$$f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

一般地, 即使 a 是 I 的内点, 如果极限 $\lim\limits_{x\to a+0}(f(x)-f(a))/(x-a)$ 存在, 则称此极限为 $f(x)$ 在 a 点处的**右微分系数**(right differential coefficient). 用 $\mathrm{D}^+f(a)$ 表示:

$$\mathrm{D}^+f(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

并且这时, 称 $f(x)$ 在 a 点处向右可微, 或**右可微**(right differentiable).

$$\mathrm{D}^+f(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

又, 设 $y = f(x)$, 则

$$\mathrm{D}^+y = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

同理可定义**左微分系数** $\mathrm{D}^-f(x)$.

例如, 如果 $f(x)$ 是定义在区间 $I = [a,b]$ 上的可微函数, 则 $f'(a) = \mathrm{D}^+f(a)$, $f'(b) = \mathrm{D}^-f(b)$. 又, 如果定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 在 I 的内点 a 处左可微和右可微, 且 $\mathrm{D}^+f(a) = \mathrm{D}^-f(a)$, 那么 $f(x)$ 在 a 点处可微, 并且 $f'(a) = \mathrm{D}^+f(a) = \mathrm{D}^-f(a)$.

3.2 微分法则

前一节, 我们在一个特定区间 I 上考察了函数 $f(x)$. 一般地, 令 $f(x)$ 是定义域包含 I 的函数, 并在区间 I 上我们考察 $f(x)$, 即考察 $f(x)$ 在 I 的限制 $f_I(x)$. 在这种情况下, 根据 2.2 节 a) 处的约定, 当 $f(x)$ 可微时, $f(x)$ 在 I 上可微, 或在 I 上关于 x 可微.

例如, 设 $I = [a,b)$, $f(x)$ 在 I 上可微, 意味着 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 的各点 x 处可微, 在 a 处右可微. 此时, 只要在 $[a,b)$ 上考察 $f(x)$, 则就约定 $f'(a)$ 表示 $\mathrm{D}^+f(a)$. 如果 $f(x)$ 在点 a 处可微, 由于 $\mathrm{D}^+f(a)$ 与 $f(x)$ 在 a 点处的微分系数一致, 因此不会因为这个约定而引起混乱.

a) 函数的线性组合、积、商的微分

下面的定理我们在高中数学中已经学过.

定理 3.2 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某区间上可微, 那么它们的线性组合 $c_1f(x) + c_2g(x)$(c_1, c_2 为常数) 和它们的积 $f(x)g(x)$ 也在该区间上可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c_1f(x) + c_2g(x)) = c_1f'(x) + c_2g'(x), \tag{3.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{3.11}$$

进一步, 如果在该区间上 $g(x) \neq 0$, 那么其商 $f(x)/g(x)$ 也在该区间上可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \tag{3.12}$$

虽然证明也与高中数学所学的相同, 但为了谨慎起见, 还是叙述一下关于积与商的微分法则的证明. 设 $y = vf(x)$, $z = g(x)$, 则对应于 x 的增量 Δx 的 yz 的增量为

$$\Delta(yz) = (y + \Delta y)(z + \Delta z) - yz = \Delta y \cdot z + y \cdot \Delta z + \Delta y \Delta z.$$

于是

$$\frac{\Delta(yz)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}z + y\frac{\Delta z}{\Delta x} + \Delta y \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

根据假设, 当 $\Delta x \to 0$ 时 ,$\Delta y/\Delta x \to f'(x), \Delta z/\Delta x \to g'(x)$, 又根据公式 (3.4), 由于 $\Delta y \to 0$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}(yz)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(yz)}{\Delta x} = f'(x) \cdot z + y \cdot g'(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

如果 $z = g(x) \neq 0$, 那么

$$\Delta\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z} = \frac{-\Delta z}{(z+\Delta z)z},$$

从而

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{1}{z}\right)}{\Delta x} = -\frac{1}{(z+\Delta z)z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\dfrac{1}{z}\right)}{\Delta x} = -\frac{1}{z^2}g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

因为 $f(x)/g(x) = f(x) \cdot 1/g(x)$, 所以利用已证明公式 (3.11), 就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \qquad \square$$

在此证明中, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某点处可微, 则极限的计算在该点成立, 所以下面的结论成立.

定理 3.2′ 如果函数 $f(x), g(x)$ 在某区间内一点 x 处可微, 那么函数 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在点 x 处可微, 并且它们微分系数分别由公式 (3.10) 和公式 (3.11) 确定. 进一步, 如果在点 x 处, $g(x) \neq 0$, 那么 $f(x)/g(x)$ 在点 x 处也可微, 它的微分系数由公式 (3.12) 确定.

b) 复合函数的微分

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的 x 的函数, $g(y)$ 是定义区间 J 上的 y 的函数, 并且 $f(x)$ 的值域 $f(I)$ 包含于 $g(y)$ 的定义域 J 内. 我们来研究 f 和 g 的复合函数 $g(f(x))$.

定理 3.3 如果函数 $f(x)$ 在 I 上关于 x 可微, $g(y)$ 在 J 上关于 y 可微, 那么复合函数 $g(f(x))$ 在 I 上关于 x 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x). \tag{3.13}$$

证明 设 $y=f(x)$, $z=g(y)=g(f(x))$, 如果对应于 x 的增量 Δx 的 y 和 z 的增量分别为 Δy 和 Δz, 那么根据公式 (3.4),

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta z=g'(y)\Delta y+o(\Delta y),$$

其中

$$o(\Delta x)=\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1(\Delta x)=\varepsilon_1(0)=0,$$
$$o(\Delta y)=\varepsilon_2(\Delta y)\Delta y,\quad \lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon_2(\Delta y)=\varepsilon_2(0)=0.$$

所以

$$\Delta z=(g'(y)+\varepsilon_2(\Delta y))\Delta y=(g'(y)+\varepsilon_2(\Delta_y))(f'(x)+\varepsilon_1(\Delta x))\Delta x.$$

从而, 若

$$\varepsilon(\Delta x)=(g'(y)+\varepsilon_2(\Delta y))\varepsilon_1(\Delta x)+f'(x)\varepsilon_2(\Delta y),$$

则

$$\Delta z=g'(y)f'(x)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0, \varepsilon_1(\Delta x)\to 0$, 又当 $\Delta y\to 0$ 时, $\varepsilon_2(\Delta y)\to 0$. 进一步, 因为 $\varepsilon_2(0)=0$, 所以当 $\Delta x\to 0$ 时, $\varepsilon_2(\Delta y)\to 0$, 从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0.$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=g'(y)f'(x).$$

即 $g(f(x))$ 关于 x 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x))=g'(y)f'(x),\quad y=f(x).$$ □

设 $y=f(x)$, $z=g(y)$, 则公式 (3.13) 可写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{3.14}$$

如果采用微分的记号, 则为

$$\mathrm{d}z=g'(y)f'(x)\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

根据这个结果求 $\mathrm{d}z$, 只须把 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 代入 $\mathrm{d}z=g'(y)\mathrm{d}y$ 即可.

注 在上述定理 3.3 的证明中, 当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y\to 0$, 但即使 $\Delta x\neq 0$ 也有可能 $\Delta y=0$ 成立. 因此从极限的计算:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

导出公式 (3.14) 的证明一般不成立. 事实上, 当 $\Delta y=0$ 时, $\Delta z/\Delta y$ 无意义. 在上述的证明中, 即使 $\Delta x\neq 0, \Delta y=0$ 时也有 $\varepsilon_2(\Delta y)=\varepsilon_2(0)=0$. 所以当 $\Delta x\to 0$ 时 $\varepsilon_2(\Delta y)\to 0$. 从而 $\varepsilon(\Delta x)\to 0$.

定理 3.3′　如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微, $g(y)$ 在 $y=f(a)$ 处可微, 那么复合函数 $\sigma(x)=g(f(x))$ 在 $x=a$ 处可微, 并且

$$\sigma'(a)=g'(f(a))f'(a).$$

证明　在定理 3.3 的证明中, 把 x 用 a, y 用 $b=f(a)$ 替换即可. □

c) 反函数的微分

设 $y=f(x)$ 是定义在区间 I 上的 x 的连续单调函数, 则根据定理 2.7, 它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 $f(I)$ 上是 y 的连续单调函数. 此时, 有下面结论:

定理 3.4　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上关于 x 可微, 且 $f'(x)\neq 0$, 那么函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 $f(I)$ 上关于 y 可微, 并且

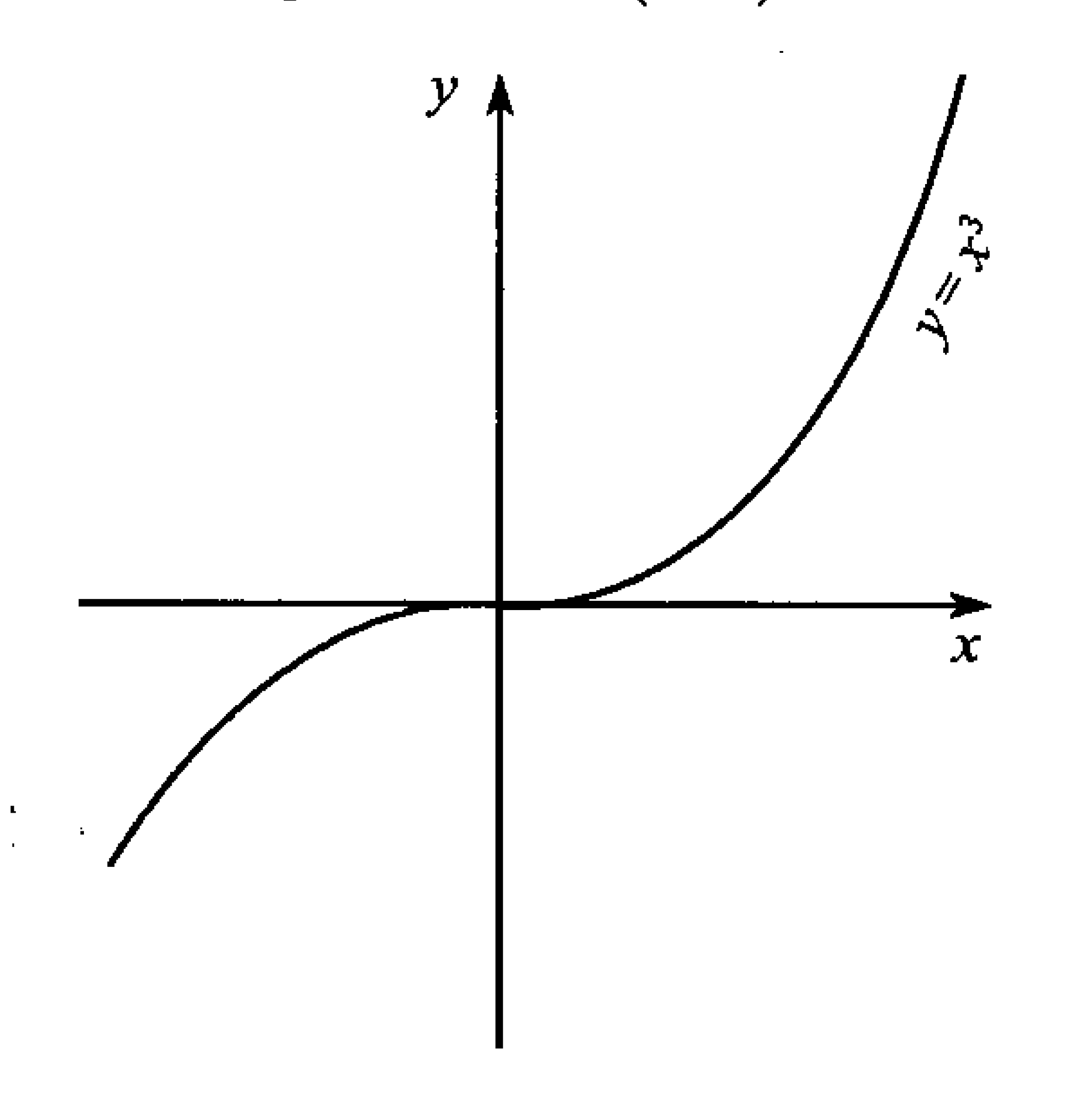
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1\bigg/\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right). \tag{3.16}$$

证明　设 y 的增量为 Δy, 与 y 对应的 x 的增量为 Δx. 因为 $f^{-1}(y)$ 连续并且单调, 所以当 $\Delta y\to 0$ 时, $\Delta x\to 0$; 当 $\Delta y\neq 0$ 时 $\Delta x\neq 0$. 因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1\bigg/\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\right)=1\bigg/\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right). \quad □$$

即使 $y=f(x)$ 是连续并且单调递增的函数, 但在某些点 x 处 $f'(x)=0$. 例如若 $f(x)=x^3$, 则 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^3/\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2=0$. 这时因为 $\Delta y=(\Delta x)^3$, 所以

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^2}=+\infty,$$



即 $f^{-1}(y)=y^{1/3}$ 在 $y=0$ 处不可微.

d) 初等函数的导函数

(1) 多项式和有理式 我们在高中时学过 x^n(n 是自然数) 的导函数为 nx^{n-1}. 此结果可以根据关于 n 的归纳法获得. 即当 $n=1$ 时, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}x=1$; 当 $n\geqslant 2$ 时, 如果假设 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^{n-1}=(n-1)\,x^{n-2}$ 成立, 那么根据函数乘积的微分法则, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,x^n=(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,(x\cdot x^{n-1})=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)\,x^{n-2}=nx^{n-1}$. 因而, 根据归纳法,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}.$$

从而, 多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的导函数为

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

求有理式 $f(x)/g(x)$ 的导函数时, 先求 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 再利用商的微分法则即可, 其中 $f(x),g(x)$ 为多项式.

(2) 对数函数 研究以不等于 1 的正实数 a 为底的对数函数 $\log_a x$. 其定义域是 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$. 由公式 (2.8) 和公式 (2.9) 知,

$$\mathrm{e}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t,$$

因而, 如果令 $s=1/t$, 那么

$$\mathrm{e}=\lim_{s\to 0}(1+s)^{1/s}. \tag{3.17}$$

于是, 因为

$$\frac{1}{h}(\log_a(x+h)-\log_a x)=\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h},$$

所以, 若令 $s=h/x$, 则

$$\frac{1}{h}(\log_a(x+h)-\log_a x)=\log_a(1+s)^{1/sx}=\frac{1}{x}\log_a(1+s)^{1/s}.$$

故由公式 (3.17) 和 $\log_a x$ 的连续性,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\log_a(x+h)-\log_a x)=\frac{1}{x}\lim_{s\to 0}\log_a(1+s)^{1/s}=\frac{1}{x}\log_a\mathrm{e}.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x=(\log_a\mathrm{e})\frac{1}{x}, \tag{3.18}$$

特别地, 若 $a=\mathrm{e}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\frac{1}{x}. \tag{3.19}$$

由等式 (3.19) 知, 对数函数的底取 e 是很自然的.

(3) 指数函数、幂函数　以不等于 1 的正实数 a 为底的指数函数 $y=a^x$ 是定义在实直线 $\mathbf{R}$ 上的连续单调函数, 其反函数为对数函数: $x=\log_a y$. 根据 (3.18) 式, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y=\log_a \mathrm{e}\cdot 1/y$, 又根据 (2.12) 式, $\log_a \mathrm{e}\cdot\log_{\mathrm{e}} a=1$. 所以由反函数的微分法则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=(\ln a)y,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=(\ln a)a^x, \tag{3.20}$$

特别地,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x. \tag{3.21}$$

虽然以上是通过求对数函数的导函数来求指数函数的导函数, 但如果用 e^x 的幂级数表示 (2.10) 式, 也可以如下直接证明 (3.21) 式. 因为

$$\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}=\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^h-1}{h},$$

所以, 要证明 (3.21) 式, 只需证明 $\lim\limits_{h\to 0}(\mathrm{e}^h-1)/h=1$ 即可. 由 (2.10) 式,

$$\mathrm{e}^h=1+h+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^n}{n!},$$

从而

$$\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^n}{n!},$$

当 $|h|<1$ 时,

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|h|^n=\frac{|h|}{1-|h|}.$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=1.$$

于是 (3.21) 式得证. 又因为 $a^x=\left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln a}$, 若令 $y=x\ln a$, 则 $a^x=\mathrm{e}^y$, 因此由复合函数的微分法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^y=\ln a\cdot\mathrm{e}^y=\ln a\cdot a^x.$$

从而 (3.20) 式得证.

对于任意给定的实数 α, 幂函数 x^α 的定义域是 $\mathbf{R}^+ = (0,+\infty)$, 它可表示为 $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x}$. 令 $y = \alpha\ln x$, 则 $x^\alpha = \mathrm{e}^y$. 所以由 (3.19) 式和 (3.21) 式,

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^y}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^y\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{3.22}$$

(4) 三角函数 由加法定理 (2.23) 式

$$\sin(x+h) = \sin h\cos x + \cos h\sin x,$$

所以

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin h}{h}\cos x + \frac{\cos h - 1}{h}\sin x.$$

从而要求 $\sin x$ 的导函数, 只需求当 $h\to 0$ 时, $\sin h/h$ 和 $(\cos h-1)/h$ 的极限即可. 由 (2.25) 式,

$$\frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} - \frac{h^6}{7!} + \cdots.$$

当 $0<|h|<1$ 时, 此式右边的交错级数的各项绝对值构成的数列 $\{h^{2n}/(2n+1)!\}$ 单调递减并且收敛于 0. 因此, 由定理 1.23,

$$1 - \frac{h^2}{6} < \frac{\sin h}{h} < 1, \quad 0<|h|<1,$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1. \tag{3.23}$$

因为 $\sin^2 h = 1-\cos^2 h = (1+\cos h)(1-\cos h)$, 所以

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{\sin h}{1+\cos h}\cdot\frac{\sin h}{h}.$$

因此, 当 $h\to 0$ 时, $\cosh\to 1$, $\sinh\to 0$, 由 (3.23) 式,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0. \tag{3.24}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x. \tag{3.25}$$

根据加法定理 (2.23),

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\cos x-\frac{\sin h}{h}\sin x,$$

同理,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=-\sin x. \tag{3.26}$$

利用商的微分法则, 可以由 (3.25) 式和 (3.26) 式直接得

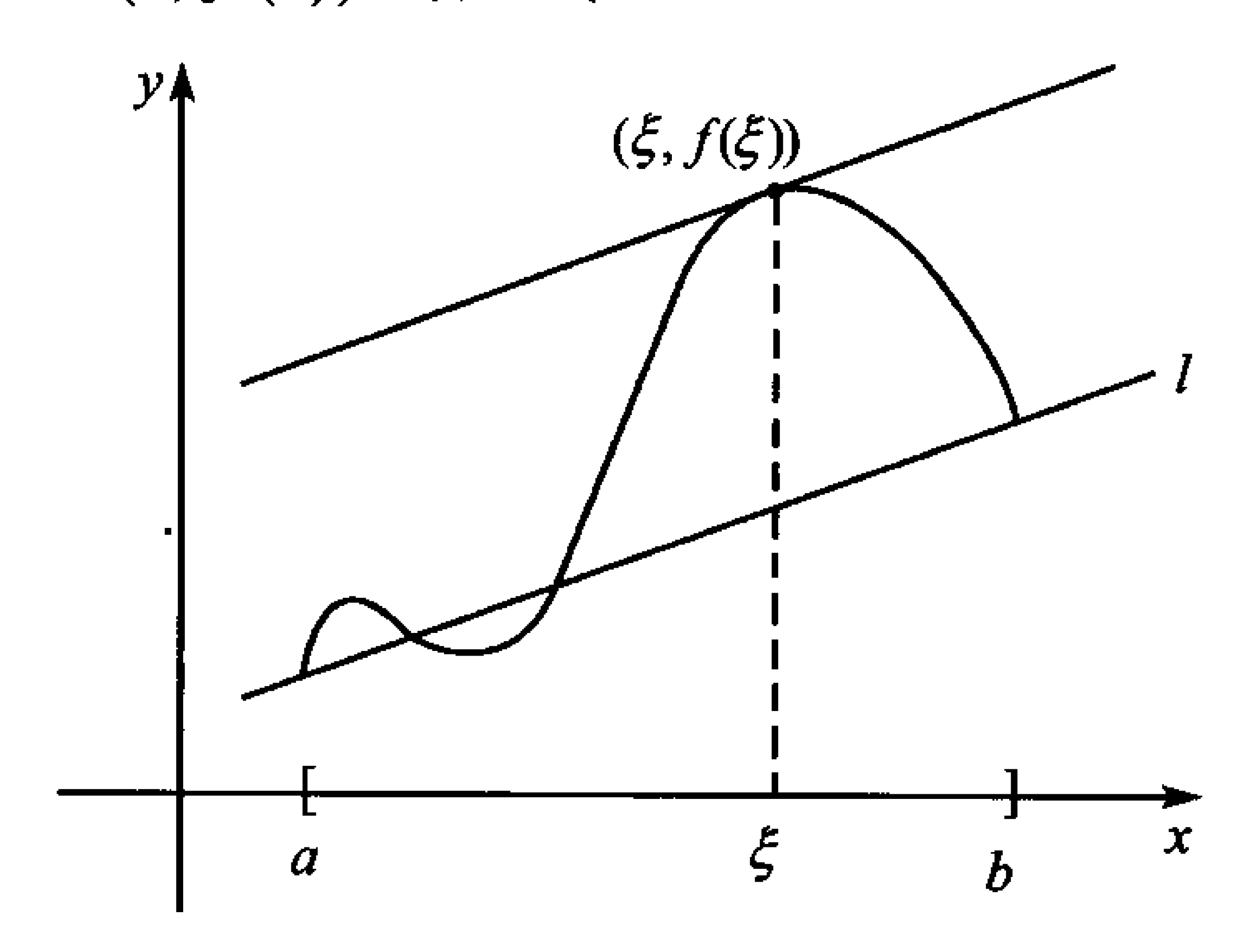
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}\pm m\pi,\quad m\text{为整数}. \tag{3.27}$$

3.3 导函数的性质

定理 3.5 (中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可微, 则存在点 ξ 满足条件

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad a<\xi<b. \tag{3.28}$$

对于函数 f 的图像 G_f, (3.28) 式意味着在 G_f 上点 $(\xi,f(\xi))$ 处的切线平行于过 G_f 两端 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线 l.



首先把这个定理的特殊情况作为引理进行证明.

引理 3.1 (Rolle 定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可微, 并且 $f(a)=f(b)$, 那么存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 设 $\gamma=f(a)=f(b)$, 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 恒等于 γ, 那么对于所有的 $\xi\,(a<\xi<b)$, 都有 $f'(\xi)=0$. 因此下面我们不考虑这种情况. 由定理 2.4, 在闭区

间 $[a,b]$ 上定义的连续函数 $f(x)$ 存在最大值 $\beta = f(\xi)\,(a \leqslant \xi \leqslant b)$ 和最小值 $\alpha = f(\eta)\,(a \leqslant \eta \leqslant b)$. 由于不考虑 $\beta = \alpha = \gamma$ 的情况, 所以或者 $\beta > \gamma$ 或者 $\alpha < \gamma$. 如果 $\beta = f(\xi) > \gamma$, 那么 $a < \xi < b$. 则由假设条件, 存在

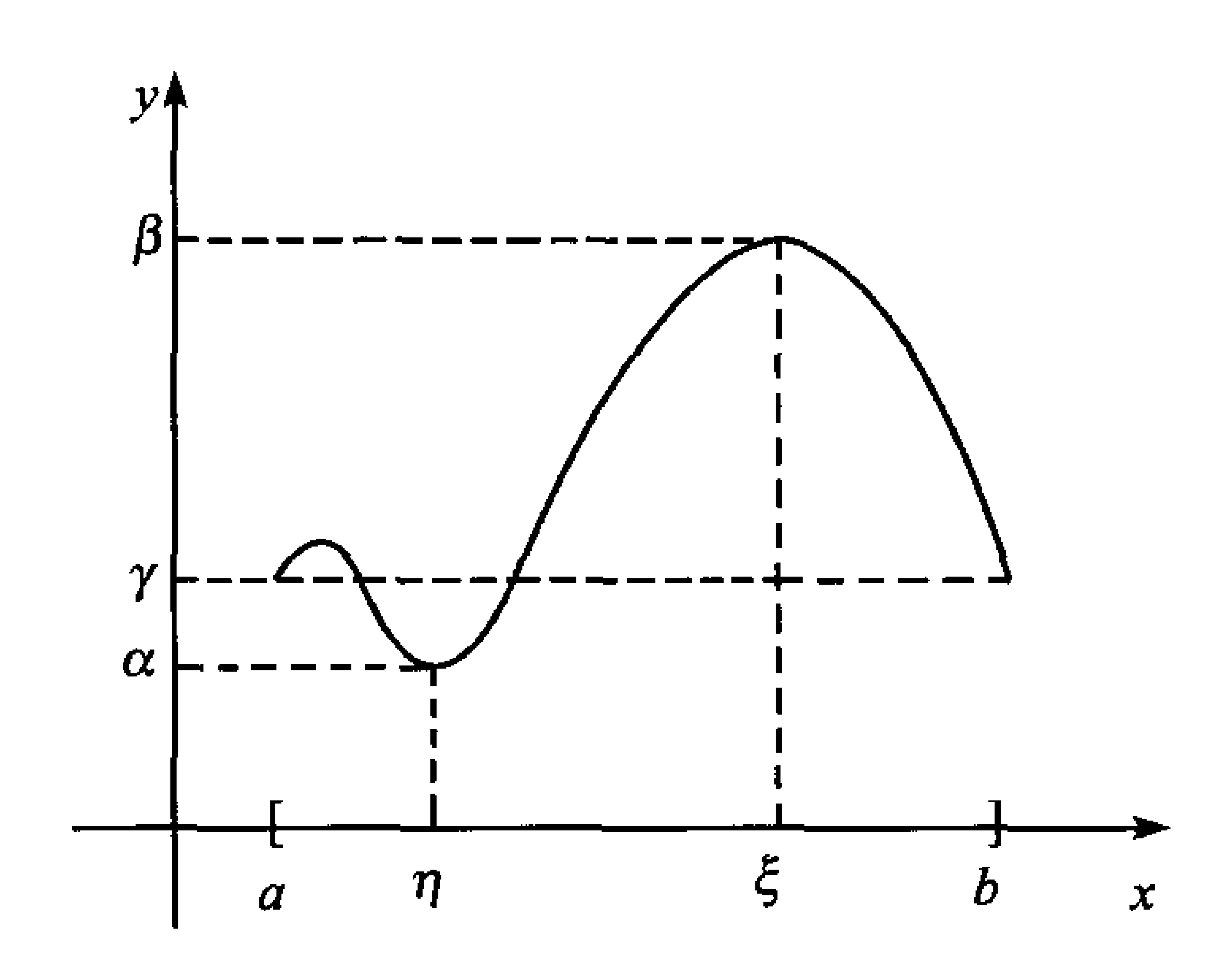
$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

因为 $f(\xi + h) - f(\xi) \leqslant 0$, 所以由 $h > 0$ 或 $h < 0$, 可知 $(f(\xi + h) - f(\xi))/h \leqslant 0$ 或 $\geqslant 0$. 因此

$$f'(\xi) = \lim_{h \to +0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0,$$

$$f'(\xi) = \lim_{h \to -0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geqslant 0.$$

所以 $f'(\xi) = 0$.



如果 $\alpha = f(\eta) < \gamma$, 那么 $a < \eta < b$, 同理可证 $f'(\eta) = 0$. □

定理 3.5 的证明

如果设

$$q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

则过 f 的图像 G_f 的两端点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线 l 的方程式为:

$$y = f(a) + q(x - a).$$

若令 $f(x)$ 与方程式右边相减所得的差为

$$g(x) = f(x) - f(a) - q(x - a).$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 并且 $g(a) = g(b) = 0$, 所以由引理 3.1, 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$. 因为 $g'(x) = f'(x) - q$, 所以 $f'(\xi) = q$. □

定理 3.6 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的可微函数. 在区间 I 上, 若恒有 $f'(\varepsilon)>0$, 那么 $f(x)$ 是单调递增函数; 恒有 $f'(\varepsilon)<0$, 那么 $f(x)$ 是单调递减函数; 若恒有 $f'(\xi)=0$, 那么 $f(x)$ 是常值函数.

证明 对于 I 内的任意两点 s,t, $s<t$, 由中值定理, 存在 ξ, 使得

$$f(t)-f(s)=f'(\xi)(t-s),\quad s<\xi<t$$

成立. 所以在区间 I 上, 若恒有 $f'(x)>0$, 则 $f(s)<f(t)$; 若恒有 $f'(x)<0$, 则 $f(s)>f(t)$; 若恒有 $f'(x)=0$, 则 $f(s)=f(t)$. □

尽管函数 $f(x)$ 在区间 I 上可微且单调递增, 但在 I 上也未必恒有 $f'(x)>0$. 例如, 虽然 $f'(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 但 $f'(0)=0$, 即 $f'(x)>0$ 恒成立只是单调递增的充分条件, 而不是必要条件.

定理 3.7 设函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的可微函数. 函数 $f(x)$ 是单调非减的充分必要条件是在区间 I 上, 恒有 $f'(x)\geqslant 0$. 函数 $f(x)$ 是单调非增的充分必要条件是在区间 I 上, 恒有 $f'(x)\leqslant 0$.

证明 如果 $y=f(x)$ 单调非减, 那么当 $\Delta x>0$ 时, $\Delta y\geqslant 0$; 当 $\Delta x<0$ 时, $\Delta y\leqslant 0$. 所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0.$$

反之, 在区间 I 上, 如果恒有 $f'(x)\geqslant 0$, 那么对于区间 I 内任意两点 $s,t\,(s<t)$, 根据中值定理, 至少存在一点 ξ, 使得

$$f(t)-f(s)=f'(\xi)(t-s),\quad s<\xi<t,$$

所以 $f(t)\geqslant f(s)$. 即 $f(x)$ 单调非减. 关于 $f(x)$ 的单调非增的情况, 同理可证. □

定理 3.8 定义在区间 I 上的可微函数 $f(x)$ 是单调递增的充分必要条件是, 在区间 I 上恒有 $f'(x)\geqslant 0$, 并且满足 $f'(x)>0$ 的点 x 的集合在 I 内稠密.

证明 如果 $f(x)$ 单调递增, 那么根据上一个定理, 在区间 I 上恒有 $f'(x)\geqslant 0$. 假设满足 $f'(x)>0$ 的点 x 的集合在 I 内不稠密, 则存在闭区间 $[s,t]\subset I$, $s<t$, 并且在该区间上不存在满足 $f'(x)>0$ 的点 x. 即如果 $s<x<t$, 那么 $f'(x)=0$. 因此由定理 3.6, 有 $f(s)=f(t)$. 这与函数 $f(x)$ 是单调递增函数相矛盾. 所以, 满足 $f'(x)>0$ 的点 x 的集合在 I 内稠密.

反之, 假设在区间 I 上恒有 $f'(x)\geqslant 0$ 并且满足 $f'(x)>0$ 的点 x 的集合在区间 I 内稠密, 则根据前一个定理可知函数 $f(x)$ 单调非减. 如果函数 $f(x)$ 非单调递增, 那么对于区间 I 内的两点 $s,t\,(s<t)$, 有 $f(s)=f(t)$. 因此, $s<x<t$ 时, $f(x)=f(s)$, 所以 $f'(x)=0$. 这与假设相矛盾. 所以 $f(x)$ 单调递增. □

关于单调递减的情况, 类似定理也同样成立.

例 3.2 $f(x)=\ln x/x$, 则 $f'(x)=(1-\ln x)/x^2$. 于是当 $x<\mathrm{e}$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x>\mathrm{e}$ 时, $f'(x)<0$. 因此 $\ln x/x$ 在区间 $0,\mathrm{e}]$ 上单调递增, 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减. 由 2.3 节例 2.9, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x/x=0$, 若令 $t=1/x$, $x\to+0$ 时 $t\to+\infty$. 所以 $\lim\limits_{x\to+0}\ln x/x=-\lim\limits_{t\to+\infty}t\ln t=-\infty$. 在 $(0,+\infty)$ 上定义的函数 $\ln x/x$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取最大值 $1/\mathrm{e}$.

下面的定理是中值定理的推广.

定理 3.9 设函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可微, 并且设 $f'(x),g'(x)$ 在 (a,b) 内任意点 x 处不同时为 0. 如果 $g(a)\neq g(b)$, 则存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},\quad a<\xi<b \tag{3.29}$$

成立.

证明 设 $\lambda=f(b)-f(a)$, $\mu=g(b)-g(a)$, 定义辅助函数

$$\varphi(x)=\mu(f(x)-f(a))-\lambda(g(x)-g(a)),$$

则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可微, 并且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, 所以由引理 3.1, 存在一点 $\xi\,(a<\xi<b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$. 因为 $\varphi'(x)=\mu f'(x)-\lambda g'(x)$, 所以 $\mu f'(\xi)=\lambda g'(\xi)$, 即

$$(g(b)-g(a))f'(\xi)=(f(b)-f(a))g'(\xi).$$

如果设 $g'(\xi)=0$, 那么因为 $g(b)-g(a)\neq 0$, 所以 $f'(\xi)=0$. 这与假设矛盾. 故 $g'(\xi)\neq 0$. 因此

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$ □

关于可微性与连续性的关系有必要进行说明. 在某区间上可微的函数在该区间上必连续 (定理 3.1 的推论), 但连续的函数未必可微.

例 3.3 如果函数 $f(x)$ 定义为：当 $x\neq 0$ 时, $f(x)=x\sin(1/x)$; 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$. 那么 $x\neq 0$ 时, 显然 $f(x)$ 连续. 又因为 $|f(x)-f(0)|\leqslant|x|$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续. 但是因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

不存在, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微. 当 $x\neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 可微, 并且

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

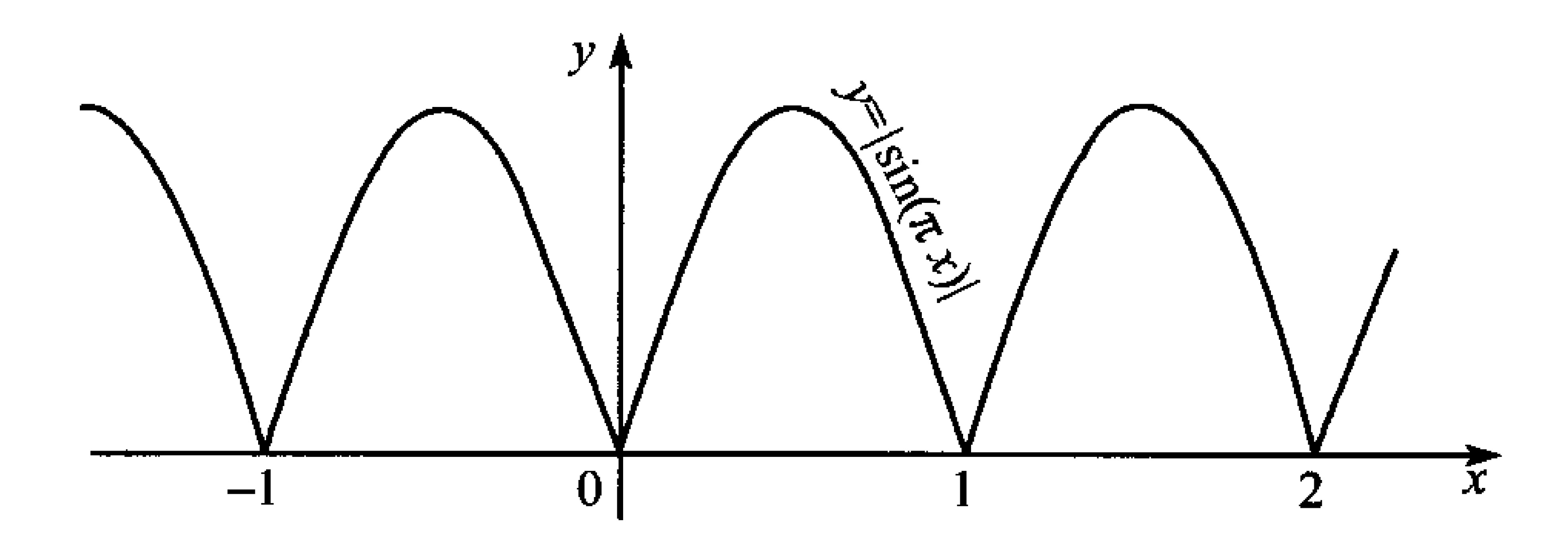
例 3.4　设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\sin(\pi n!x)|,$$

对任意实数 x, 等式右边的级数显然绝对收敛. $f(x)$ 是定义在实直线 $\mathbf{R}$ 上的 x 的连续函数, 但在有理点 r 处不可微.

[证明] 函数 $f(x)$ 的连续性将在第 5 章中证明. $|\sin(\pi x)|$ 是连续函数, 并且在实直线 $\mathbf{R}$ 上除整数点外的每一点处可微, 在每个整数点处左可微或右可微

$$\mathrm{D}^{+}|\sin(\pi k)|=\pi,\quad \mathrm{D}^{-}|\sin(\pi k)|=-\pi.$$



假设 $f(x)$ 在有理点 r 处可微, 并且把使得 $n!r$ 为整数的最小自然数 n 设为 m. 那么当 $n<m$ 时 ,$n!r$ 不是整数. 所以 $|\sin(\pi n!x)|$ 在 $x=r$ 处可微, 因此

$$f_m(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\sin(\pi n!x)|$$

也在 $x=r$ 处可微. 另一方面, 如果设 $\sigma_m(x)=|\sin(\pi m!x)|/2^m$, 那么

$$f_m(x)\geqslant\sigma_m(x),\quad f_m(r)=\sigma_m r=0,$$

又因为当 $x\to r+0$ 时 $x-r>0$; 当 $x\to r-0$ 时, $x-r<0$, 所以

$$f'_m(r)=\lim_{x\to r+0}\frac{f_m(x)}{x-r}\geqslant\lim_{x\to r+0}\frac{\sigma_m(x)}{x-r}=\mathrm{D}^{+}\sigma_m(r)=\frac{m!\pi}{2^m},$$

$$f'_m(r)=\lim_{x\to r-0}\frac{f_m(x)}{x-r}\leqslant\lim_{x\to r-0}\frac{\sigma_m(x)}{x-r}=\mathrm{D}^{-}\sigma_m(r)=-\frac{m!\pi}{2^m}.$$

这是矛盾的. □

Weierstrass 证明了, 定义为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(k^n\pi x),\quad k \text{ 为奇数}, k\geqslant 13$$

的连续函数 $f(x)$ 在实直线 $\mathbf{R}$ 上的各点 x 处是不可微的①.

① 参考藤原松三郎的《微分積分学 I》, pp. 160–164

在某区间上可微, 从而连续的函数的导函数未必在该区间上连续.

例 3.5 定义函数 $f(x)$ 为: 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$; 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$. 则

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0,$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的各点 x 处可微. 但是, 如果设 $h_n = 1n\pi$(n 为自然数), 则当 $n \to \infty$ 时, $h_n \to 0$, 并且 $f'(h_n) = (-1)^{n+1}$. 因而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续, 并且 $\lim\limits_{x\to +0} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to -0} f'(x)$ 都不存在.

定理 3.10 如果定义在区间 $[c, b)$ 上的连续函数 $f(x)$ 在开区间 (c, b) 上可微, 并且 $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ 存在, 那么 $f(x)$ 在 c 处也可微, 并且

$$f'(c) = \lim_{x\to c+0} f'(x).$$

证明 设 $c < x < b$, 则根据中值定理, 存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi), \quad c < \xi < x,$$

当然 ξ 未必只有一点, 如果对应各个 x, 选取一点 ξ, 当 $x \to c + 0$ 时, $\xi \to c + 0$, 则

$$\lim_{x\to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\xi\to c+0} f'(\xi).$$

即 $f(x)$ 在 c 处可微且 $f'(c) = \lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$. □

同理, 如果定义在 $(a, c]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 (a, c) 上可微, 并且 $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在点 c 处也可微, 并且 $f'(c) = \lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$.

推论 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 并且在区间内除 c 点外可微. 如果 $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ 存在, 那么 $f(x)$ 在点 c 处也可微, 并且 $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} f'(x)$.

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可微, $a < c < b$. 如果 $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$ 同时存在, 则 $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x) = f'(c)$, $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x) = f'(c)$, 即 $f'(x)$ 在点 c 处连续; 导函数 $f'(x)$ 不含有满足 $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$ 同时存在, 而 $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$ 的不连续点.[①]

① 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可微, 则导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 上不存在可去间断点和第一类间断点.

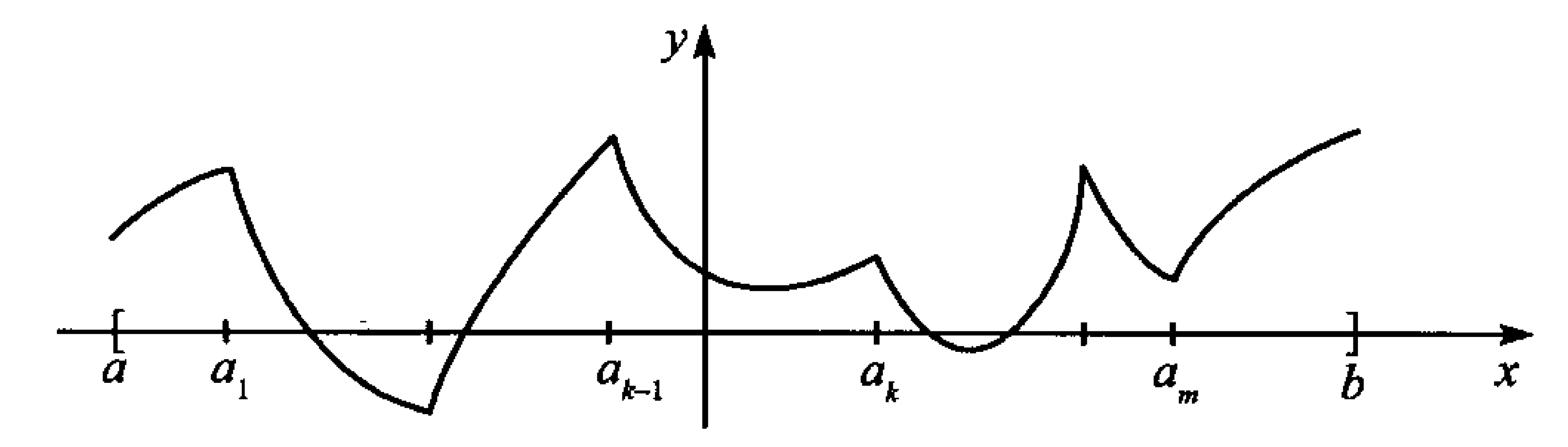
—— 译者注

光滑函数 函数 $f(x)$ 在区间 I 上可微, 并且它的导函数 $f'(x)$ 在 I 上连续时, 称函数 $f(x)$ 在 I 上是**光滑**(smooth) 的, 或**连续可微**的.

在有限区间 I 上连续的函数 $f(x)$, 如果满足以下的条件, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**分段光滑**(piecewise smooth): 函数 $f(x)$ 在区间 I 上除有限个点 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots, a_m$ 外光滑, 那么在各点 a_k 处函数 $f(x)$ 左右可微, 并且

$$\lim_{x \to a_k+0} f'(x) = \mathrm{D}^+ f(a_k), \quad \lim_{x \to a_k-0} f'(x) = \mathrm{D}^- f(a_k).$$

此时, 若设 $I = (a, b], a_1 < \cdots < a_{k-1} < a_k < \cdots < a_m$, 则区间 I 被分割为 $m+1$ 个子区间 $I_1 = (a, a_1], \cdots, I_k = [a_{k-1}, a_k], \cdots, I_{m+1} = [a_m, b]$, 并且在各子区间 I_k 上 $f(x)$ 是光滑的函数. 这就是称它为分段光滑函数的原因. 在实际应用上, 比起单纯的可微函数, 光滑函数或分段光滑函数更常见.



在无限区间例如 $[0, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$, 如果在包含于 $[0, +\infty)$ 的任意有限区间 I 上分段光滑, 那么称函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上分段光滑. 例如, 函数 $|\sin x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上分段光滑.

3.4 高阶微分

a) 高阶导函数

在区间 I 上定义的可微函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}x) f(x)$ 也在区间 I 上可微时, 称函数 $f(x)$ 在区间 I 上 2 阶可微. 把 $f'(x)$ 的导函数 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) f'(x)$ 称作 $f(x)$ 的 **2 阶导函数**(second derivative). $f(x)$ 的 2 阶导函数用 $f''(x)$ 或 $\left(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2\right) f(x)$ 表示. 当然 $\left(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2\right) f(x)$ 表示 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)((\mathrm{d}/\mathrm{d}x) f(x))$. 进而, 如果 $f''(x)$ 在区间 I 上可微, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上 **3** 阶可微, 把 $f''(x)$ 的导函数 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) f''(x)$ 称为 $f(x)$ 的 **3 阶导数**(third derivative), 记为 $f'''(x)$ 或 $\left(\mathrm{d}^3/\mathrm{d}x^3\right) f(x)$. 同样可以定义 4 阶, 5 阶, $\cdots$, n 阶, $\cdots$ 的导函数. 一般地, 如果 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}(x) = \left(\mathrm{d}^{n-1}/\mathrm{d}x^{n-1}\right) f(x)$ 在区间 I 上可微, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可微, $f^{(n-1)}(x)$ 的导函数 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) f^{(n-1)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 **n 阶导函数**(n-th derivative, n-th derived function), 记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n) f(x)$. n 阶导函数也称**第 n 阶**导函数. 在区间 I 内点 a 处的 $f^{(n)}(x)$ 的值 $f^{(n)}(a)$ 是 $f(x)$ 在点 a 处的 **n 阶微分系数**.

表示函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导函数的符号除 $f^{(n)}(x)$, $(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n)f(x)$ 外, 还有 $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n, y^{(n)}, (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^n f(x), \mathrm{D}^n f(x)$ 等.

一般地, 函数 $f(x)$ 的定义域包含区间 I 时, 根据 2.2 节 a) 的约定, 如果 $f(x)$ 在区间 I 上的限制 $f_I(x)$ 在区间 I 上 n 阶可微, 那么称函数 $f(x)$ 在 I 上 n 阶可微, 或者在 I 上关于 x 是 n 阶可微的.

定理 3.11 如果函数 $y=f(x)$ 和 $z=g(x)$ 在区间 I 上 n 阶可微, 则它们的线性组合 $c_1y+c_2z=c_1f(x)+c_2g(x)$, c_1, c_2 为常数, 及它们的积 $yz=f(x)g(x)$ 也在 I 上 n 阶可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(c_1y+c_2z)=c_1y^{(n)}+c_2z^{(n)}, \tag{3.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(yz)=y^{(n)}z+\binom{n}{1}y^{(n-1)}z'+\cdots+\binom{n}{k}y^{(n-k)}z^{(k)}+\cdots+yz^{(n)}. \tag{3.31}$$

进而, 如果在区间 I 上 $g(x)\neq 0$, 那么商 $f(x)/g(x)$ 亦在 I 上 n 阶可微.

证明 c_1y+c_2z 是 n 阶可微, 并且易知 (3.30) 式成立.

yz 的 n 阶可微性及 (3.31) 式成立, 可以通过对 n 用归纳法证明. 即假设 yz 是 $n-1$ 阶可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(yz)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}y^{(n-1-k)}z^{(k)}$$

成立. 这里我们约定 $y^{(0)}=y, z^{(0)}=z$. 根据假设因为 y 和 z 是 n 阶可微, 所以式子右边的 $y^{(n-1-k)}$ 和 $z^{(k)}$ 至少 1 阶可微, 从而 $(\mathrm{d}^{n-1}/\mathrm{d}x^{n-1})(yz)$ 可微, 即 yz 是 n 阶可微.

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{(n-1-k)}z^{(k)})=y^{(n-k)}z^{(k)}+y^{(n-k-1)}z^{(k+1)}$$

成立, 所以利用公式 $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(yz)&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}y^{(n-k)}z^{(k)}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}y^{(n-k-1)}z^{(k+1)}\\&=y^{(n)}z+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]y^{(n-k)}z^{(k)}+yz^{(n)}\\&=y^{(n)}z+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}y^{(n-k)}z^{(k)}+yz^{(n)}.\end{aligned}$$

即 (3.31) 式成立.

要证明 $z=g(x)\neq 0$ 时, $y/z=f(x)/g(x)$ 是 n 阶可微, 只须证明 $1/z$ 是 n 阶可微即可. 因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)(1/z)=-z'/z^2$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{z''}{z^2}+\frac{2z'^2}{z^3}=\frac{-zz''+2z'^2}{z^3},$$

同理,

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{6zz'z''-z^2z'''-6z'^3}{z^4}.$$

计算到此, 对于 $m=4,5,6,\cdots,n$, 如果 $1/z$ 是 m 阶可微, 那么我们猜测它的 m 阶导函数可用 $z,z',z'',\cdots,z^{(m)}$ 的某个多项式 $P_m\left(z,z',z'',\cdots,z^{(m)}\right)$ 来表示,

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{P_m(z,z',z'',\cdots,z^{(m)})}{z^{m+1}}, \tag{3.32}$$

这通过 m 的归纳法容易证明, 即如果假设 $1/z$ 是 $m-1$ 阶可微, 并且假设

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{P_{m-1}(z,z',\cdots,z^{m-1})}{z^m},$$

那么因为 $z\neq 0, m\leqslant n$, 所以此式的右边可微, 从而 $(\mathrm{d}^{m-1}/\mathrm{d}x^{m-1})(1/z)$ 也可微, 即 $1/z$ 是 m 阶可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^{m+1}}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{m-1}-mz'P_{m-1}\right).$$

此式右边 $z(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)P_{m-1}(z,z',\cdots z^{(m-1)})-mz'P_{m-1}(z,z',\cdots,z^{(m-1)})$ 显然是 z', $z'',\cdots,z^{(m)}$ 的多项式, 于是如果用 $P_m(z,z',z'',\cdots,z^{(m)})$ 来表示 $1/z$ 的 m 阶导数, 那么 (3.32) 式就可直接获得. □

积的高阶导函数公式 (3.31) 称为 **Leibniz 法则**. 多项式 $P_m(z,z',\cdots,z^{(m)})$ 不能用简单的形式表示.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的 x 的函数, $g(y)$ 是定义在区间 J 上的 y 的函数. 在此考察 $f(I)$ 包含于区间 J 时的复合函数 $g(f(x))$.

定理 3.12 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可微, $g(y)$ 在 J 上 n 阶可微. 那么复合函数 $g(f(x))$ 在区间 I 上关于 x 是 n 阶可微的, 它的 n 阶导数 $(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n)g(f(x))$ 可表示为 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),g'(f(x)),g''(f(x)),\cdots,g^{(n)}(f(x))$ 的多项式.

证明 设 $y=f(x)$, 则由复合函数的微分法,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x))=g'(f(x))f'(x)=g'(y)y'.$$

因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)g'(y)=g''(y)y'$, 则 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)g(f(x))$ 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g(f(x))=g''(y)y'^2+g'(y)y''.$$

同理,

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}g(f(x)) = g'''(y)y'^3 + 3g''(y)y'y'' + g'(y)y'''.$$

当 $m = 4, 5, 6, \cdots n$ 时, $g(f(x))$ 是 m 阶可微, 并且 m 阶导函数 $(\mathrm{d}^m/\mathrm{d}x^m)\, g(f(x))$ 是关于 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(m)}(x), g'(f(x)), g''(f(x)), \cdots, g^{(m)}(f(x))$ 的多项式. 这可通过 m 的归纳法很容易地证明. □

设 $y = f(x)$ 是定义在区间 I 上的 x 的可微的单调函数. 如果在区间 I 上恒有 $f'(x) \neq 0$, 那么根据 2.2 节的定理 2.7 及 3.2 节的定理 3.4, 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是定义在区间 $f(I)$ 上的 y 的可微的单调函数. 这时有下面结论成立:

定理 3.13 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上关于 x 是 n 阶可微的, 那么 $x = f^{-1}(y)$ 是 $f(I)$ 上关于 y 的 n 阶可微函数, 并且它的 n 阶导函数可用 $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ 的某个多项式 $\varPhi_n\left(f', f'', \cdots, f^{(n)}\right)$ 来表示.

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}y^n} = \frac{\varPhi_n(f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x))}{(f'(x))^{2n-1}}, \quad x = f^{-1}(y). \tag{3.33}$$

证明 由 (3.16) 式,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(x)}, \quad x = f^{-1}(y),$$

如果 $f(x)$ 是 2 阶可微的, 那么 $1/f'(x)$ 关于 x 可微, 又因为 $x = f^{-1}(y)$ 关于 y 可微, 所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ 关于 y 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{1}{f'(x)}\left(\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}\right) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

下面利用 n 的归纳法. 假设函数 $f(x)$ 是 $n-1$ 阶可微的, 函数 $x = f^{-1}(y)$ 关于 y 是 $n-1$ 阶可微的, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}y^{n-1}} = \frac{\varPhi_{n-1}(f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x))}{(f'(x))^{2n-3}}, \quad x = f^{-1}(y), \tag{3.34}$$

那么当 $f(x)$ 是 n 阶可微时, 因为 (3.34) 式的右边关于 x 可微, $x = f^{-1}(y)$ 关于 y 可微, 所以 $\mathrm{d}^{n-1}x/\mathrm{d}y^{n-1}$ 关于 y 可微, 即函数 $x = f^{-1}(y)$ 关于 y 是 n 阶可微的. 并且

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}y^n} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varPhi_{n-1}}{(f')^{2n-3}}\right) = \frac{1}{(f')^{2n-1}}\left(f'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varPhi_{n-1} - (2n-3)f''\varPhi_{n-1}\right).$$

因为 $\varPhi_{n-1}\left(f', f'', \cdots, f^{(n-1)}\right)$ 是 $f', f'', \cdots, f^{(n-1)}$ 的多项式. 所以

$$f'(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varPhi_{n-1}(f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)) - (2n-3)f''(x)\varPhi_{n-1}(f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x))$$

可表示为 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ 的多项式. 因此只要把它改写为 $\Phi_n(f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x))$, 就能直接获得 (3.33) 式. □

多项式 $\Phi_n\left(f', f'', \cdots, f^{(n)}\right)$ 不能用简单的形式来表示.

b) 初等函数的高阶导函数、多项式、有理式

关于 x 的幂 x^k, k 是自然数, 因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)x^k = kx^{k-1}$, 所以

$$\text{当 } n \leqslant k \text{ 时},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^k = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n},$$

$$\text{当 } n > k \text{ 时},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^k = 0.$$

因此, k 阶多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ 在实直线 $\mathbf{R}$ 上任意阶可微, 并且当 $n > k$ 时, $(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n)f(x) = 0$. 根据定理 3.11, 有理式 $f(x)/g(x)$, $f(x), g(x)$ 是多项式, 并且它们在 $\mathbf{R}$ 上除去方程式 $g(x) = 0$ 的根外任意阶可微.

幂函数 对于任意的实数 α, 在 $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$ 上定义的幂函数 x^α, 因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$, 所以幂函数 x^α 任意阶可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^\alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \tag{3.35}$$

指数函数和对数函数 因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, 所以无论对指数函数 e^x 微分多少次, 它都不会改变:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.$$

因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\ln x = x^{-1}$, 所以对数函数 $\ln x$ 也任意阶可微. 根据 (3.35) 式, $(\mathrm{d}^{n-1}/\mathrm{d}x^{n-1})x^{-1} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ln x = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \tag{3.36}$$

三角函数 因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\sin x = \cos x, (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\cos x = -\sin x$, 所以 $\sin x, \cos x$ 任意阶可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}x^{2n-1}}\sin x = (-1)^{n-1}\cos x,\quad \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\sin x = (-1)^n\sin x, \tag{3.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2n-1}}{\mathrm{d}x^{2n-1}}\cos x = (-1)^n\sin x,\quad \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\cos x = (-1)^n\cos x. \tag{3.38}$$

因此, 根据定理 3.11, 除去使 $\tan x = \sin x/\cos x$ 中的 $\cos x = 0$ 的点 x, 即 $\pi/2 + m\pi$, m 为整数外, $\tan x$ 是任意阶可微的.

c) Taylor 公式

定理 3.14 设 $f(x)$ 是在区间 I 上 n 阶可微的函数, 点 a 属于区间 I. 则对于属于区间 I 的任意点 x, 存在介于 x 和 a 之间的一点 ξ, 使得

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^n(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

成立.

此式子称为 **Taylor 公式**. 该式最后一项 $\left(f^{(n)}(\xi)/n!\right)(x-a)^n$ 叫做**余项** (remainder), 并用 R_n 表示. 习惯上把介于 x 和 a 之间的 ξ 写为: $\xi=a+\theta(x-a), 0<\theta<1$. 按这种写法, Taylor 公式又可表示为:

$$\begin{aligned}f(x)=&f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\&+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n,\end{aligned}\tag{3.39}$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n,\quad \xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

当 $n=1$ 时, (3.39) 式可以归结为中值定理 (3.28) 式. Taylor 公式可看作是中值定理的推广.

定理 3.14 的证明 设

$$F(x)=R_n=f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$F(x)$ 可看作 x 的函数. 则 $F(x)$ 是 I 上的 n 阶可微函数. 当 $m\leqslant k$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{(x-a)^k}{k!}\right)=\frac{(x-a)^{k-m}}{(k-m)!},$$

所以, 当 $m\leqslant n-1$ 时,

$$F^{(m)}(x)=f^{(m)}(x)-f^{(m)}(a)-\frac{f^{(m+1)}(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1-m)!}(x-a)^{n-1-m}.$$

从而,

$$F(a)=F'(a)=F''(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0.$$

因为 $F(x)$ 的余项是 R_n, 所以只须证明 $F(x)/(x-a)^n$ 可表示为 $f^{(n)}(\xi)/n!$ 即可. 为此, 令 $G(x)=(x-a)^n$, 则当 $m\leqslant n-1$ 时,

$$G^{(m)}(x)=n(n-1)\cdots(n-m+1)(x-a)^{n-m},$$

当 $m=n$ 时, $G^{(n)}(x)=n!$. 所以,

$$G(a)=G'(a)=G''(a)=\cdots=G^{(n-1)}(a)=0,$$

又, 如果 $x \neq a$, 那么

$$G(x) \neq 0, \quad G'(x) \neq 0, \cdots, \quad G^{(n-1)}(x) \neq 0.$$

于是, 因为在 $a < x$ 和 $a > x$ 两种情况下证明相同, 所以我们仅讨论 $a < x$ 的情况. 当 $F(a) = G(a) = 0, x \neq a$ 时, $G'(x) \neq 0$, 所以根据 3.3 节的定理 3.9, 存在 ξ_1 满足

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}, \quad a < \xi_1 < x.$$

再由定理 3.9, 存在 ξ_2 满足

$$\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}, \quad a < \xi_2 < \xi_1.$$

同理, 当 $m = 3, 4, 5, \cdots, n-1$ 时, 存在 ξ_m 使得

$$\frac{F^{(m-1)}(\xi_{m-1})}{G^{(m-1)}(\xi_{m-1})} = \frac{F^{(m)}(\xi_m)}{G^{(m)}(\xi_m)}, \quad a < \xi_m < \xi_{m-1}$$

成立. 所以

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{G^{(n-1)}(\xi_{n-1})}, \quad a < \xi_{n-1} < x.$$

因为 $F^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a), G^{(n-1)}(x) = n!(x-a)$, 所以, 根据中值定理, 存在 ξ 满足

$$\frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{G^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{n!(\xi_{n-1} - a)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad a < \xi < \xi_{n-1}.$$

故

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad a < \xi < x.$$ □

在上述证明的最后一段中, 我们是利用中值定理证明的, 但如果改用 (3.6) 式, 则有

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{\xi_{n-1} - a} = f^{(n)}(a) + \varepsilon(\xi_{n-1} - a),$$

这里, $\varepsilon(h)$ 表示满足 $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$ 的函数. 因为 ξ_{n-1} 介于 x 和 a 之间, 所以 $(1/n!)\,\varepsilon(\xi_{n-1} - a)(x-a)^n = o((x-a)^n)$, 因此

$$F(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

所以,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n). \tag{3.40}$$

如果 $f^{(n-1)}(x)$ 在点 a 处可微, 那么此式证明中所用的 (3.6) 式成立. 因此, 如果 $f(x)$ 在 I 上 $n-1$ 阶可微, 并且 $f^{(n-1)}(x)$ 在点 a 处可微, 那么 (3.40) 式成立. 所以 (3.40) 式是 (3.6) 式的推广.

如果 $f(x)$ 在区间 I 上可微, 并且 $f'(x)$ 在区间 I 内的一点 a 处可微, 那么当 $a+h, a-h$ 都属于区间 I 时, 由 (3.40) 式,

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2),$$

$$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2),$$

因此,

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=f''(a)h^2+o(h^2).$$

所以,

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}. \tag{3.41}$$

Taylor 公式 (3.39) 的余项 R_n, 当给定满足 $0\leqslant q\leqslant n-1$ 的一个整数 q 时, 可用

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)(1-\theta)^q}{(n-1)!(n-q)}(x-a)^n,\quad \xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1 \tag{3.42}$$

表示.

[证明] 对给定的点 x, 余项

$$R_n=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

可看作 a 的函数, 并为了方便观察, 将 x 与 a 互换, 令

$$F(x)=f(a)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(a-x)-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(a-x)^{n-1}.$$

则根据假设, $f(x)$ 在区间 I 上 n 次可微, 从而 $F(x)$ 在 I 上是关于 x 可微的函数. 因为

$$F'(x)=-f'(x)+\frac{f'(x)}{1!}-\frac{f''(x)}{1!}(a-x)+\frac{f''(x)}{1!}(a-x)-\frac{f'''(x)}{2!}(a-x)^2+\cdots,$$

所以,

$$F'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(a-x)^{n-1}.$$

并且易见 $F(a)=0$. 令 $G(x)=(a-x)^{n-q}$, 则由 3.3 节的定理 3.9, 在 x 和 a 之间存在满足

$$\frac{F(x)}{(a-x)^{n-g}} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

的一点 ξ. 因为 $G'(\xi) = -(n-q)(a-\xi)^{n-q-1}$, 所以

$$F(x) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}(a-x)^{n-q} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\frac{(a-\xi)^q}{(n-q)}(a-x)^{n-q}.$$

所以, 若再将 x 与 a 互换回来, 则

$$R_n \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\frac{(x-\xi)^q}{(n-q)}(x-a)^{n-q}.$$

这里, 若令 $\xi = a+\theta(x-a), 0<\theta<1$, 则 $x-\xi = (1-\theta)(x-a)$, 所以

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\frac{(1-\theta)^q}{(n-q)}(x-a)^n.$$ □

(3.42) 式右边称为 **Schlömilch 余项.** 若令 $q=n-1$, 则 (3.42) 式变成:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n, \quad \xi = a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1. \tag{3.43}$$

此式的右边称为 **Cauchy 余项**. 当 $q=0$ 时, (3.42) 式变成:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad \xi = a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1.$$

此式右边称为 **Lagrange 余项.** Taylor 公式 (3.39) 的余项就是 Lagrange 余项. 当 $q=0$ 时, (3.42) 式的上述证明给出了 Taylor 公式 (3.39) 的另一种证法. 可是在此证法中, 在函数 $f^{(n-1)}(x)$ 在一点 a 处可微的假设之下, 不能证明 (3.40) 式.

设 $f(x)$ 是区间 I 上任意阶可微的函数, 则对于任意的自然数 n, Taylor 公式:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

成立. 此时, 如果在区间 I 内的每一点

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

则 $f(x)$ 在区间 I 上用 $x-a$ 的幂级数的和

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \quad (3.44)$$

来表示. 这个幂级数称为以 a 为中心的 **Taylor 级数**, 或者称为 $f(x)$ 的以 a 为中心的 **Taylor 展开**(Taylor expansion). 另外, $f(x)$ 表示为 (3.44) 式的形式时, 称该形式为 $f(x)$ 在区间 I 上以 a 为中心的 Taylor 级数**展式**.

例 3.6 考察 e^x 的以 $a=0$ 为中心的 Taylor 级数展式. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 则 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$, 所以 $f^{(n)}(0)=1$. 因此有 $R_n=\left(\mathrm{e}^{\xi}/n!\right)x^n$. 又因为 ξ 介于 x 和 0 之间, 所以 $|\xi|<|x|$, 从而

$$|R_n|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^n}{n!}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

所以, e^x 是在实直线 $\mathbf{R}$ 上, 以 0 为中心的 Taylor 级数展式:

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

这正是我们在 2.3 节中得到的 e^x 的幂级数表示 (2.10) 式.

同理, $\cos x$ 和 $\sin x$ 的以 0 为中心的 Taylor 展式即是它的幂级数表示 (2.24) 式和 (2.25) 式.

例 3.7 $\ln x$ 的 Taylor 展开. 设 $f(x)=\ln x$, 则根据 (3.36) 式, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. 因此, $f^{(n)}(a)/n!=(-1)^{n-1}/na^n$, $R_n=\left((-1)^{n-1}/n\right)\cdot\left((x-a)/\xi\right)^n$. 因为 $\ln x$ 的定义域是 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$, 所以 $x>0, a>0$. 当 $a<x$ 时, $a<\xi<x$. 所以, 如果 $x\leqslant 2a$, 则

$$\frac{x-a}{\xi}<\frac{x-a}{a}\leqslant 1,$$

当 $x<a$ 时, $x<\xi<a$. 所以, 如果 $x\geqslant a/2$, 则

$$\left|\frac{x-a}{\xi}\right|=\frac{a-x}{\xi}<\frac{a-x}{x}\leqslant 1.$$

即, 如果 $a/2\leqslant x\leqslant 2a$, 则 $|(x-a)/\xi|\leqslant 1$, 因此

$$|R_n|=\frac{1}{n}\left|\frac{x-a}{\xi}\right|^n\to 0 \quad (n\to\infty).$$

对 $0<x<a/2$ 的情形, 为证明 $R_n\to 0(n\to\infty)$, 如果采用 Cauchy 余项 (3.43) 式, 则

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\xi^n}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n, \quad \xi=a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1.$$

设 $0<x<a$, $r=(a-x)/a$, 则 $0<r<1$, 且

$$\left|\frac{x-a}{\xi}\right|=\frac{a-x}{a+\theta(x-a)}=\frac{r}{1-\theta r}\leqslant\frac{r}{1-\theta},$$

因此

$$|R_n|\leqslant\left|\frac{x-a}{\xi}\right|r^{n-1}=\left(\frac{a-x}{\xi}\right)r^{n-1}\leqslant\left(\frac{a-x}{x}\right)r^{n-1}\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以, 在区间 $(0,2a]$ 上, $\ln x$ 的以 a 为中心的 Taylor 级数展式为:

$$\ln x=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-a}{a}\right)^n. \tag{3.45}$$

如果 $x>2a$, 则 $(x-a)/a>1$. 因此, 当 $n\to\infty$ 时, $(1/n)\left((x-a)/a\right)^n\to+\infty$. 所以 Taylor 展开 (3.45) 式不成立. 即当 $x>2a, n\to\infty$ 时, $R_n\to 0$ 不成立. 在 (3.45) 式中如果令 $a=1, x=2$, 则得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots. \tag{3.46}$$

d) 凸函数和凹函数

设 $f(x)$ 是关于 x 的函数, 且区间 I 包含于 $f(x)$ 的定义域. 对于区间 I 内的任意两点 $x_1,x_2,x_1\neq x_2$ 和使得 $\lambda+\mu=1$ 的任意正实数 λ,μ, 如果恒有不等式

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+\mu f(x_2) \tag{3.47}$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**凸的**(convex), 或向下凸. 如果恒有不等式

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)<\lambda f(x_1)+\mu f(x^2) \tag{3.48}$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上**严格凸**(strictly convex).

设 G_f 是函数 $f(x)$ 的图像, 并且令 $P_1=(x_1,f(x_1)), P_2=(x_2,f(x_2))$, 则

$$P=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda f(x_1)+\mu f(x_2))$$

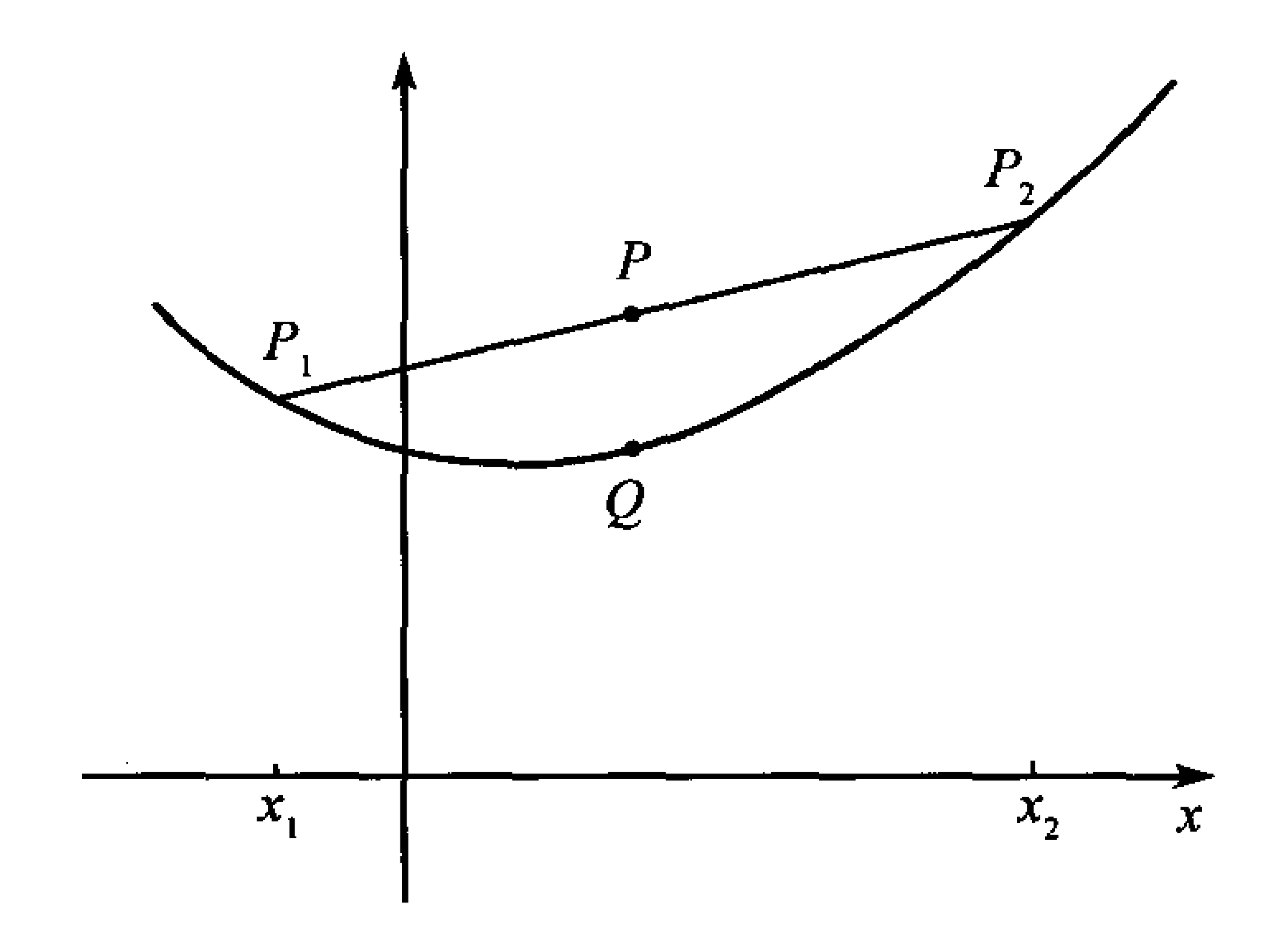
是线段 P_1P_2 上的点,

$$Q=(\lambda x_1+\mu x_2,f(\lambda x_1+\mu x_2))$$

是 G_f 上的点. 因此, 不等式 (3.47) 式恒成立意味着线段 P_1P_2 上每一点 P 或者在图像 G_f 的 “上侧”, 或者是在图像 G_f 上, 不等式 (3.48) 式恒成立意味着线段 P_1P_2 上每一点 P, $P\neq P_1\neq P_2$, 均在图像 G_f 的 “上侧”.

对于 I 内的任意两点 x_1,x_2 和使 $\lambda+\mu=1$ 的任意正实数 λ,μ, 使 (3.47) 式的不等号取相反符号时, 即不等式

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$$



恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**凹的**(concave) 或称向上凸. 若不等式

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) > \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上**严格凹的**(strictly concave). 如果函数 $f(x)$ 在 I 上凹或严格凹, 那么函数 $-f(x)$ 在 I 上凸或严格凸. 所以下面我们将主要考察凸函数.

定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 在 I 上凸时, 称 $f(x)$ 为**凸函数**(convex function). 进而 $f(x)$ 在 I 上严格凸时, 称 $f(x)$ 为**严格凸函数**(strictly convex function). 也可同样定义**凹函数**和**严格凹函数**.

定理 3.15 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上 2 阶可微.

(1) 函数 $f(x)$ 在 I 上凸的充分必要条件是在 I 的内点 x 处恒有 $f''(x) \geqslant 0$.

(2) 如果在 I 的内点 x 处恒有 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格凸.

证明 (1) 首先假设 $f(x)$ 在 I 上凸, 证其在 I 的内点 x 处恒有 $f''(x) \geqslant 0$. 由假设, 不等式 (3.47) 式, 即

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

成立. 若 x 是 I 的内点, 令 $x_1 = x - h, x_2 = x + h, \lambda = \mu = 1/2$, 则 $\lambda x_1 + \mu x_2 = x$. 因此

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(x-h) + \frac{1}{2} f(x+h).$$

所以由 (3.41) 式,

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geqslant 0.$$

反之, 假设在 I 的内点 x 处恒有 $f''(x) \geqslant 0$, 证函数 $f(x)$ 在 I 上凸. 为此, 把不等式 (3.47) 式两边的差表示为:

$$\Delta = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

当 $x_1 < x_2$ 时, 令 $a = \lambda x_1 + \mu x_2$, 则由 Taylor 公式 (3.39) 式,

$$f(x_1) - f(a) = f'(a)(x_1 - a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1 - a)^2, \quad x_1 < \xi_1 < a,$$

$$f(x_2) - f(a) = f'(a)(x_2 - a) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2 - a)^2, \quad a < \xi_2 < x_2.$$

在两个等式两边分别乘以 λ, μ, 再将两个等式同边相加, 则因为 $\lambda(x_1-a)+\mu(x_2-a) = \lambda x_1 + \mu x_2 - a = 0$, 所以

$$\Delta = \frac{1}{2}\lambda f''(\xi_1)(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}\mu f''(\xi_2)(x_2 - a)^2. \tag{3.49}$$

因为 ξ_1, ξ_2 都是区间 I 的内点, 所以由假设, $f''(\xi_1) \geqslant 0, f''(\xi_2) \geqslant 0$, 故 $\Delta \geqslant 0$, 即不等式 (3.47) 式成立. 因此函数 $f(x)$ 在 I 上凸.

(2) 假设在 I 的内点 x 处恒有 $f''(x) > 0$, 则在 (3.49) 式中, 因为 $f''(\xi_1) > 0, f''(\xi_2) > 0$, 所以 $\Delta > 0$. 即不等式 (3.48) 成立. 所以函数 $f(x)$ 在 I 上严格凸. □

推论　$f(x)$ 在区间 I 上 2 阶可微.

(1) 函数 $f(x)$ 在 I 上凹的充分必要条件是在 I 的内点 x 处恒有 $f''(x) \leqslant 0$ 成立.

(2) 在 I 的内点 x 处如果恒有 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格凹.

e) 极大和极小

关于极大和极小我们已经在高中数学中学过. 设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, a 是区间 I 的内点. 对于某个正实数 ε, 当 $0 < |x - a| < \varepsilon$ 时, 如果 $f(x) < f(a)$ 成立, 那么称 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的**极大值**; 当 $0 < |x - a| < \varepsilon$ 时, 如果 $f(x) > f(a)$ 成立, 那么称 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的**极小值**. 将极大值、极小值统称为**极值**. 这里 a 因为是 I 的内点, 所以可以认为 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 包含在 I 内. 于是, 当 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值时, $f(a)$ 也是区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上的 $f(x)$ 的最大值; 当 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值时, $f(a)$ 也是区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上的 $f(x)$ 的最小值. 因此, 可由与 3.3 节中引理 3.1(Rolle 定理) 的完全相同的证明方法, 获得下面的定理:

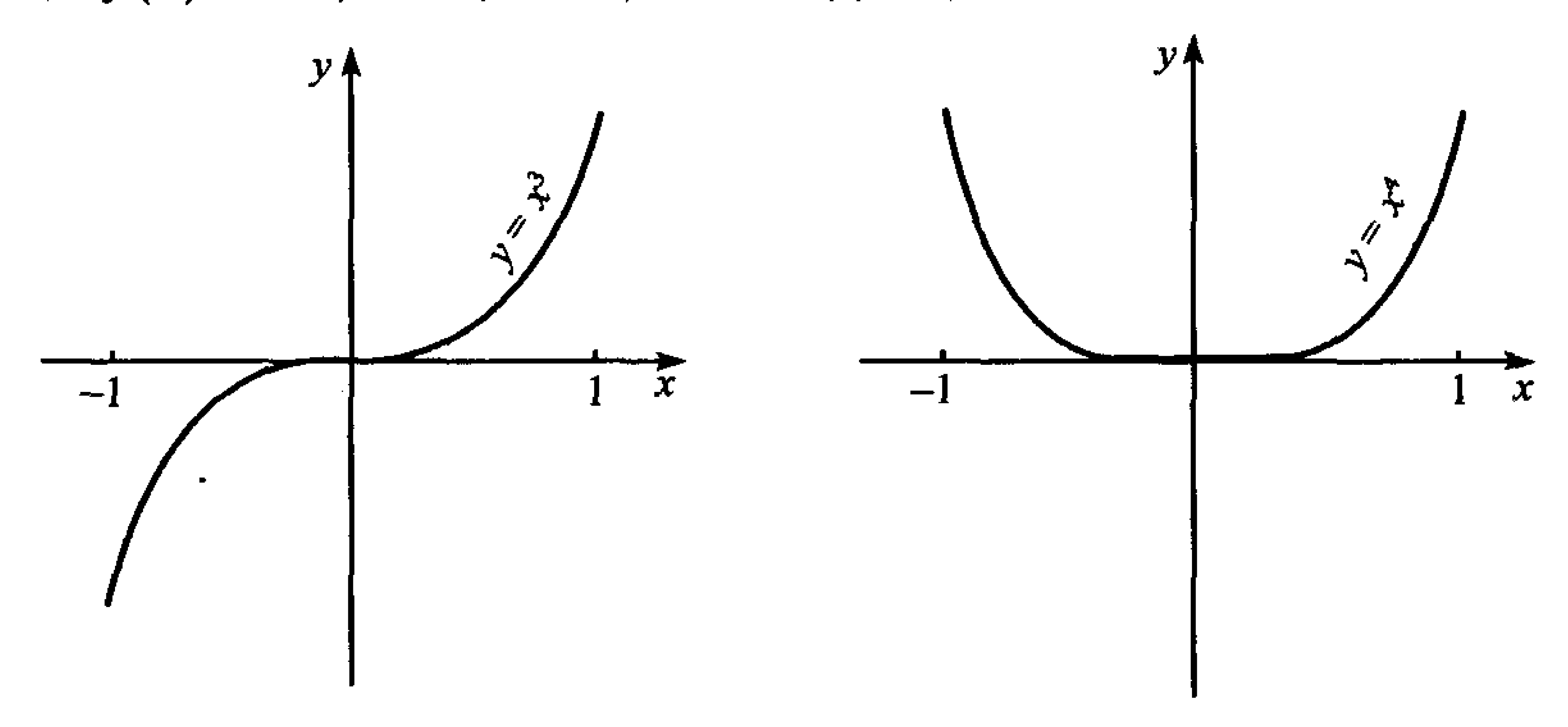
定理 3.16　如果在区间 I 上可微的函数 $f(x)$ 在 I 的内点 a 处取极值, 那么 $f'(a)=0$.

由定理 3.16, $f'(a) = 0$ 是 $f(a)$ 成为函数 $f(x)$ 极值的必要条件, 但它并不是充分条件. 假设 $f(x)$ 在区间 I 上 2 阶可微, 则根据 Taylor 公式 (3.40) 式, 当 $f'(a) = 0$ 时, 有

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2).$$

当 $f''(a) < 0$ 时, 如果取正实数 ε 充分小, 则只要 $0 < |x - a| < \varepsilon$, 就有 $\dfrac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2) < 0$ 成立, 所以 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值. 同理, 如果 $f''(a) > 0$, 则 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

下面我们为了讨论 $f''(a)=0$ 的情况, 考察当 $a=0$ 时, 满足 $f'(0)=f''(0)=0$ 的典型函数 $f(x)=x^n$, n 是大于等于 3 的自然数.



因为 $f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$, 所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0, \quad f^{(n)}(0)=n!,$$

并且当 n 是奇数时, 如果 $x>0$, 那么 $x^n>0$; 如果 $x<0$, 那么 $x^n<0$. 所以 $f(0)=0$ 不是函数 $f(x)=x^n$ 的极值. 当 n 是偶数时, 如果 $x\neq 0$, 那么 $x^n>0$, 所以 $f(0)=0$ 是 $f(x)=x^n$ 的极小值.

一般地, 下面的结论成立：

定理 3.17 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可微, $n\geqslant 2$, 并且 $f(x)$ 在 I 的内点 a 处, 有

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a)\neq 0,$$

那么, 当 n 是奇数时, $f(a)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值. 当 n 是偶数时, 若 $f^{(n)}(a)>0$, 则 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值; 若 $f^{(n)}(a)<0$ 时, 则 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

证明 根据 Taylor 公式 (3.40) 式,

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

因此, 如果取正实数 ε 充分小, 那么当 $0<|x-a|<\varepsilon$ 时, $f(x)-f(a)$ 的符号和 $\left(f^{(n)}(a)/n!\right)(x-a)^n$ 的符号一致, 从而易证定理 3.17 成立. □

当 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可微, 并且在区间 I 的内点 a 处, $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a), f^{(n)}(a)\neq 0, n$ 是大于等于 3 的奇数时, 称 $f(a)$ 为函数 $f(x)$ 的**平稳值**(stationary value), a 为 $f(x)$ 的**平稳点**. 当 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的平稳值时, 由 Taylor 公式,

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}+o((x-a)^{n-2}).$$

所以, 如果 $f^{(n)}(a) > 0$, 那么在点 a 的邻域内, 当 $x > a$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < a$ 时, $f''(x) < 0$. 因此如果取正实数 ε 充分小, 那么根据定理 3.15 和它的推论, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+\varepsilon]$ 上严格凸, 在区间 $[a-\varepsilon, a]$ 上严格凹. 同样, 如果 $f^{(n)}(a) < 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+\varepsilon]$ 上严格凹, 在区间 $[a-\varepsilon, a]$ 上严格凸. 因此, 在平稳点的邻域内, $x < a$ 时和 $x > a$ 时, 函数的凹凸性正好相反.

正如我们在高中所学过的, 当函数 $f(x)$ 给定时, 通过考察 $f(x)$ 的增减、极值、凹凸, 就容易画出函数的近似图像 G_f, 并且易于了解函数 $f(x)$ 的性质.

例 3.8　考察定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \ln x / x^2$. 由 2.3 节的例 2.9,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0,$$

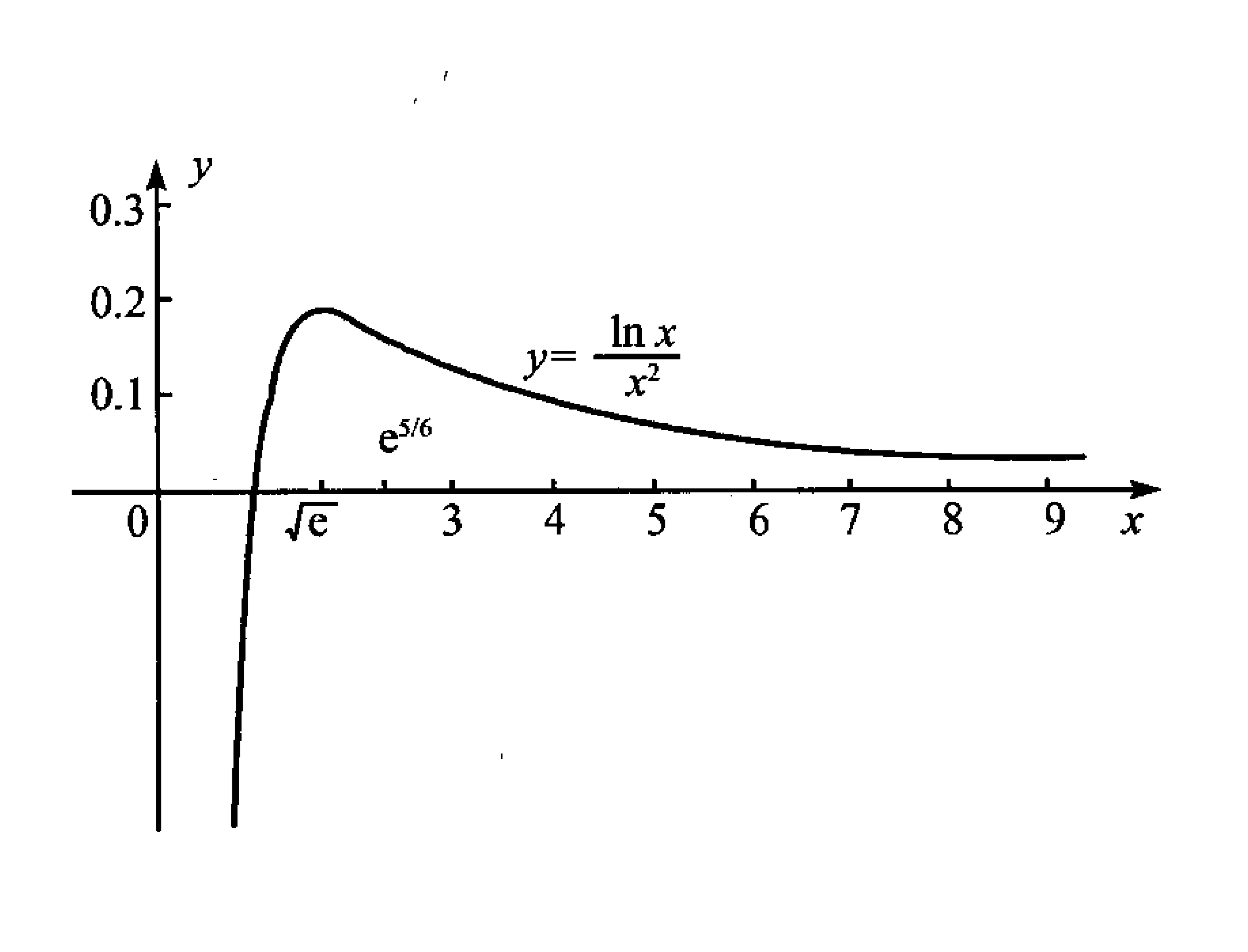
设 $t = 1/x$, 则

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^2} = -\lim_{t\to+\infty} t^2 \ln t = -\infty,$$

并且显然有 $f(1) = 0$. 因为

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4},$$

所以 $f'(\sqrt{e}) = 0$, 并且当 $x < \sqrt{e}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $f'(x) < 0$. 因此, 根据 3.3 节的定理 3.6, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}\,]$ 上单调递增, 在区间 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(\sqrt{e}) = 1/(2e)$ 是 $f(x)$ 的最大值. 进而, 当 $x < e^{5/6}$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $x > e^{5/6}$ 时, $f''(x) > 0$. 因此根据定理 3.15 及它的推论, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e^{5/6})$ 上严格凹, 在区间 $[e^{5/6}, +\infty)$ 严格凸, 并且 $f(e^{5/6}) = (5/6)(1/e^{5/3})$.



x	$f(x)$
0.8	−0.349
0.9	−0.130
1	0.000
1.1	0.079
1.2	0.127
1.3	0.155
1.4	0.172
1.5	0.180
$\sqrt{e}=1.65$	0.184
2	0.173
$e^{5/6}=2.3$	0.157
2.5	0.147
3	0.122
4	0.087
5	0.064
6	0.050
7	0.040
8	0.032
9	0.027

f) 函数的级

如果定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 是 n 阶可微的, 并且它的 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 连续时, 称函数 $f(x)$ 在 I 上 n 阶**连续可微**(n-times continuously differentiable), 并称 $f(x)$ 是 $\mathscr{C}^n$ **类**的函数 (function of class $\mathscr{C}^n$). $\mathscr{C}^1$ 类的函数即是光滑函数. 当函数 $f(x)$ 任意阶可微时, 称函数 $f(x)$ 是**无限阶可微**(infinitely differentiable), 或者称函数 $f(x)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ **类**的函数 (function of class $\mathscr{C}^\infty$), 或者 $\mathscr{C}^\infty$ **函数**.

在现代数学中, 处理 n 阶连续可微函数的机会要比处理 n 阶可微函数多. 这是因为既然已假设存在 n 阶导函数, 再连带假设它连续是很自然的事情. $\mathscr{C}^\infty$ 类函数在流形理论等方面有广泛的应用.

用 “n 阶连续可微” 将上述定理 3.11、定理 3.12 和定理 3.13 中的 “n 阶可微” 替换后, 定理依然成立.

定理 3.18 (1) 如果函数 $f(x), g(x)$ 是 $\mathscr{C}^n$ 类函数, 则它们的线形组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$ 以及它们的积 $f(x)g(x)$ 也是 $\mathscr{C}^n$ 类函数, 并且如果恒有 $g(x)\neq 0$ 时, 则商 $f(x)/g(x)$ 也是 $\mathscr{C}^n$ 类函数.

(2) 设函数 $f(x)$ 是关于 x 的 $\mathscr{C}^n$ 类函数, $g(y)$ 是关于 y 的 $\mathscr{C}^n$ 类函数, 则复合函数 $g(f(x))$ 是关于 x 的 $\mathscr{C}^n$ 类函数.

(3) 如果 $y=f(x)$ 是关于 x 的 $\mathscr{C}^n$ 类单调函数, 并且恒有 $f(x)\neq 0$, 则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是 y 的 $\mathscr{C}^n$ 类单调函数.

这里, 函数 f 和 g 的定义域与定理 3.11、定理 3.12 和定理 3.13 中的假设是同样的.

证明 (1) 由定理 3.11 和 (3.32) 式, 函数 $c_1f(x)+c_2g(x)$, $f(x)g(x)$ 和 $f(x)/g(x)$ 是 n 阶可微的, 它的 n 阶导函数是 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x), g(x), g'(x), \cdots, g^{(n)}(x)$ 的多项式或者是以 $(g(x))^{n+1}$ 为分母的有理式. 因此它们是连续函数.

(2) 根据定理 3.12, $g(f(x))$ 是 n 阶可微函数, 并且 $(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n)\, g(f(x))$ 是 $f'(x), \cdots, f^{(n)}(x), g'(f(x)), \cdots, g^{(n)}(f(x))$ 的多项式. 由假设, 因为 $f'(x), \cdots, f^{(n)}(x), g'(y), \cdots, g^{(n)}(y)$ 是连续函数, 所以 $(\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n)\, g(f(x))$ 也是连续函数.

(3) 根据定理 3.13, $x=f^{-1}(y)$ 是关于 y 的 n 阶可微函数, 并且

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}y^n}=\frac{\Phi_n(f'(x), \cdots, f^{(n)}(x))}{(f'(x))^{2n-1}}, \quad x=f^{-1}(y).$$

根据假设, 因为 $f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ 是关于 x 的连续函数, $f'(x)\neq 0$, $x=f^{-1}(y)$ 是关于 y 的连续函数, 所以, $\mathrm{d}^n x/\mathrm{d}y^n$ 是关于 y 的连续函数. □

因为对于所有的自然数 n, $\mathscr{C}^n$ 类的函数即是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 所以, 用 “$\mathscr{C}^\infty$ 类” 替换定理 3.18 的 “$\mathscr{C}^n$ 类” 则定理依然成立.

对于实直线 $\mathbf{R}$ 上的点 a, 把包含 a 的开区间 $U=(\alpha,\beta),\alpha<a<\beta$ 称为 a 的**邻域**. a 的 ε 邻域 $U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 是 a 的一个邻域.

设 $f(x)$ 是定义在开区间 I 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. 当 $f(x)$ 在以属于 I 内的各点 a 为中心的 a 的邻域上都可展成 Taylor 级数时, 称 $f(x)$ 为**实解析函数**(real analytic function), 或者称 $f(x)$ 在 I 上是**实解析的**(real analytic).

例 3.9 在 3.4 节的例 3.6 中, 把 e^x 展成了以 0 为中心的 Taylor 级数, 同样, e^x 也能以任意点 a 为中心展成 Taylor 级数. 即, 令 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 时, 因为 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$, 所以由 Taylor 公式 (3.39) 式,

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a+\frac{\mathrm{e}^a}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{\mathrm{e}^a}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{\mathrm{e}^\xi}{n!}(x-a)^n,$$

并且因为 ξ 介于 a 与 x 之间, 所以当 $x>a$ 时, $\mathrm{e}^\xi<\mathrm{e}^x$; 当 $x\leqslant a$ 时, $\mathrm{e}^\xi\leqslant\mathrm{e}^a$. 无论哪种情况都有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^\xi/n!\right)(x-a)^n=0$ 成立. 因此,

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a+\frac{\mathrm{e}^a}{1!}(x-a)+\frac{\mathrm{e}^a}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{\mathrm{e}^a}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

所以, e^x 是定义在实直线 $\mathbf{R}$ 上的实解析函数.

同样, $\cos x,\sin x$ 也是 $\mathbf{R}$ 上的实解析函数.

如例 3.7 所述, $\ln x$ 在以任意点 $a\in\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$ 为中心的 a 的邻域 $(0,2a)$ 上可展成 Taylor 级数, 即 $\ln x$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是实解析函数.

$\mathscr{C}^\infty$类函数未必是实解析函数.

例 3.10 在实直线 $\mathbf{R}$ 上, 定义函数 $\psi(x)$ 如下:

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-1/x}, & x>0.\end{cases}$$

则函数 $\psi(x)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数.

[证明] 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\mathrm{e}^{-1/x}=0$, 所以 $\psi(x)$ 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的连续函数. 根据定理 3.18, $\psi(x)=\mathrm{e}^{-1/x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. 在区间 $(-\infty,0]$ 上 $\psi(x)$ 当然也是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 并且对于所有的自然数 n, 都有 $\psi^{(n)}(x)=0$. 当 $x>0$ 时,

$$\Psi'(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x},\quad \Psi''(x)=\frac{1-2x}{x^4}\mathrm{e}^{-1/x},$$

一般地,

$$\psi^{(n)}(x)=\frac{\Psi_n(x)}{x^{2n}}\mathrm{e}^{-1/x},\quad \Psi_n(x)\text{是 } x \text{ 的多项式}. \tag{3.50$_n$}$$

这可由关于 n 的归纳法很容易地验证. 即, 如果假设 $(3.50)_{n-1}$ 成立, 则通过简单计算可得

$$\psi^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\Psi_{n-1}(x)}{x^{2n-2}}\mathrm{e}^{-1/x}\right)=\frac{[1-(2n-2)x]\,\Psi_{n-1}(x)+x^2\,\Psi'_{n-1}(x)}{x^{2n}}\cdot\mathrm{e}^{-1/x}.$$

所以, 如果令

$$\Psi_n(x)=[1-(2n-2)x]\,\Psi_{n-1}(x)+x^2\,\Psi'_{n-1}(x), \tag{3.51}$$

则 $(3.50)_n$ 成立. $\Psi_1(x)=1$, $\Psi_2(x)=-2x+1$, 一般地, $\Psi_n(x)$ 是满足

$$\Psi_n(x)=(-1)^{n-1}n!x^{n-1}+\cdots+1 \qquad (3.52)_n$$

的关于 x 的 $n-1$ 次多项式. 这是因为, 若假设 $(3.52)_{n-1}$ 成立, 则根据 (3.51) 式,

$$\begin{aligned}\Psi_n(x)&=[1-(2n-2)x]\,\Psi_{n-1}(x)+x^2\,\Psi'_{n-1}(x)\\&=[1-(2n-2)x]((-1)^n(n-1)!x^{n-2}+\cdots+1)\\&\quad+x^2((1-)^n(n-1)!(n-2)x^{n-3}+\cdots)\\&=(-1)^{n-1}n!x^{n-1}+\cdots+1.\end{aligned}$$

因为当 $x>0$ 时, $\psi'(x)>0$. 所以 $\psi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 显然, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-1/x}=1$. 又因为当 $0<x<1/2$ 时, $\psi''(x)>0$; 当 $x>1/2$ 时, $\psi''(x)<0$. 所以函数 $\psi(x)$ 在区间 $(0,1/2]$ 上严格凸, 在 $[1/2,+\infty)$ 上严格凹.

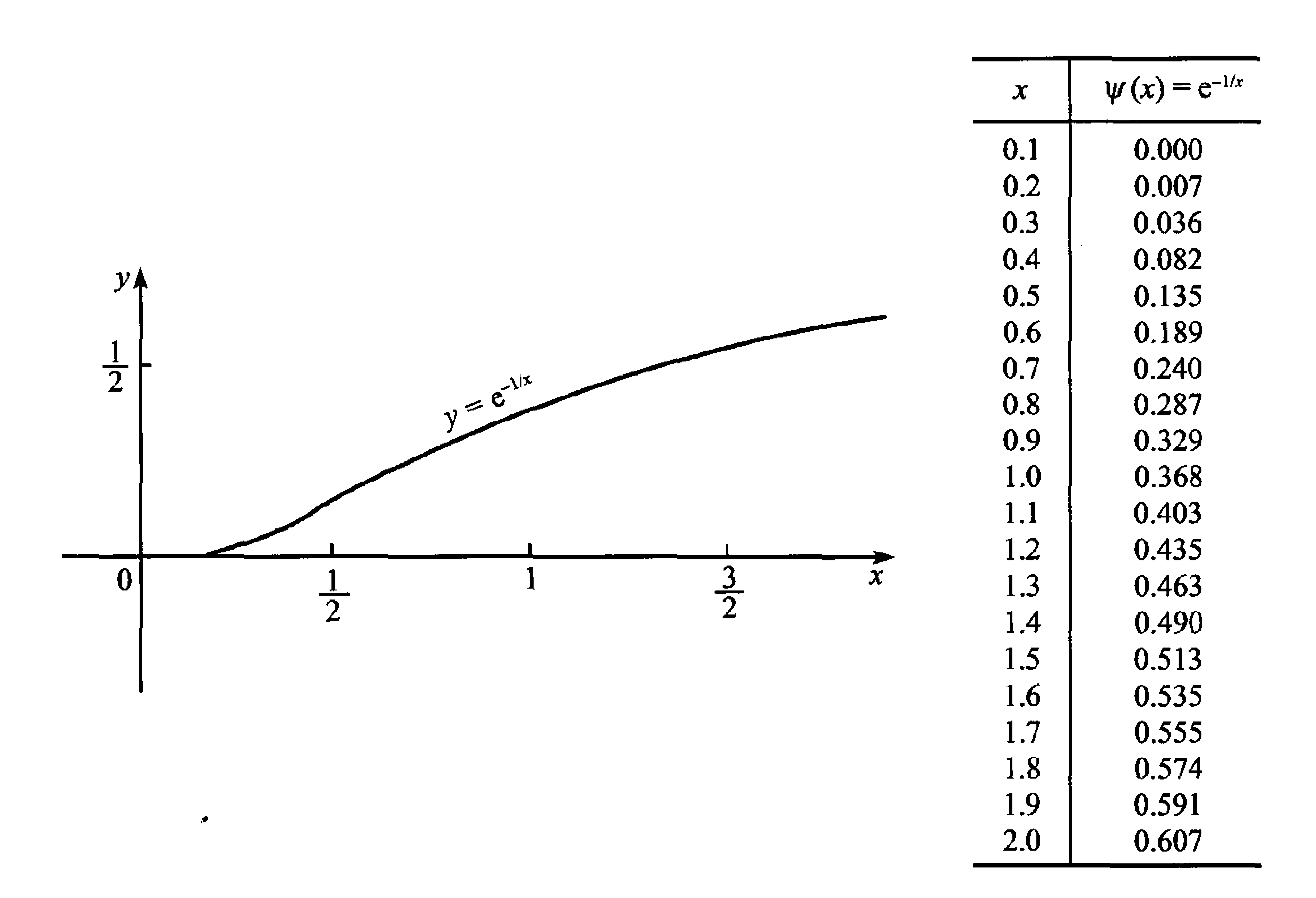
设 $t=1/x$, 则根据 2.3 节的 (2.6) 式, 对于任意的自然数 m,

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^m}\mathrm{e}^{-1/x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^m}{\mathrm{e}^t}=0.$$

所以, 根据 $(3.50)_n$ 式和 $(3.52)_n$ 式, $\lim\limits_{x\to+0}\psi^{(n)}(x)=0$, 又因为当 $x\leqslant 0$ 时, $\psi^{(n)}(x)=0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\psi^{(n)}(x)=0.$$

利用此结果, 可如下验证 $\psi(x)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. 首先, 函数 $\psi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 并且除 $x=0$ 外是连续可微的, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\psi'(x)=0$. 所以根据 3.3 节中定理 3.10 的推论, $\psi(x)$ 在 $x=0$ 处也可微, 并且 $\psi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\psi'(x)=0$. 即函数 $\psi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是 $\mathscr{C}^1$ 类函数. 现假设函数 $\psi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是 $\mathscr{C}^{n-1}$ 类函数, 则函数 $\psi^{(n-1)}(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 除 $x=0$ 外连续可微, 并且 $\lim\limits_{x\to 0}\psi^{(n)}(x)=0$. 所以, 再根据定理 3.10 的推论, $\psi^{(n-1)}(x)$ 也在 $x=0$ 处可微, 并且 $\psi^{(n)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\psi^{(n)}(x)=0$. 即 $\psi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也是 $\mathscr{C}^n$ 类函数. 所以, 根据关于 n 的归纳法, 函数 $\psi(x)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. □



x	$\psi(x) = e^{-1/x}$
0.1	0.000
0.2	0.007
0.3	0.036
0.4	0.082
0.5	0.135
0.6	0.189
0.7	0.240
0.8	0.287
0.9	0.329
1.0	0.368
1.1	0.403
1.2	0.435
1.3	0.463
1.4	0.490
1.5	0.513
1.6	0.535
1.7	0.555
1.8	0.574
1.9	0.591
2.0	0.607

由上述讨论可知, 虽然函数 $\psi(x)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 但在 0 的任意邻域 $(-\varepsilon, +\varepsilon), \varepsilon > 0$ 上, $\psi(x)$ 都不能展成以 0 为中心的 Taylor 级数. 事实上, 如果假设函数 $\psi(x)$ 在 $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ 上能展成以 0 为中心的 Taylor 级数:

$$\psi(x) = \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

那么 $\psi(0), \psi'(0), \cdots \psi^{(n)}(0), \cdots$ 全部为 0, 这与当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时 $\psi(x) = 0$, 当 $x > 0$ 时 $\psi(x) = e^{1/x} > 0$ 相矛盾. 所以 $\psi(x)$不是实解析函数, 当然 Taylor 公式:

$$\psi(x) = \frac{\psi^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

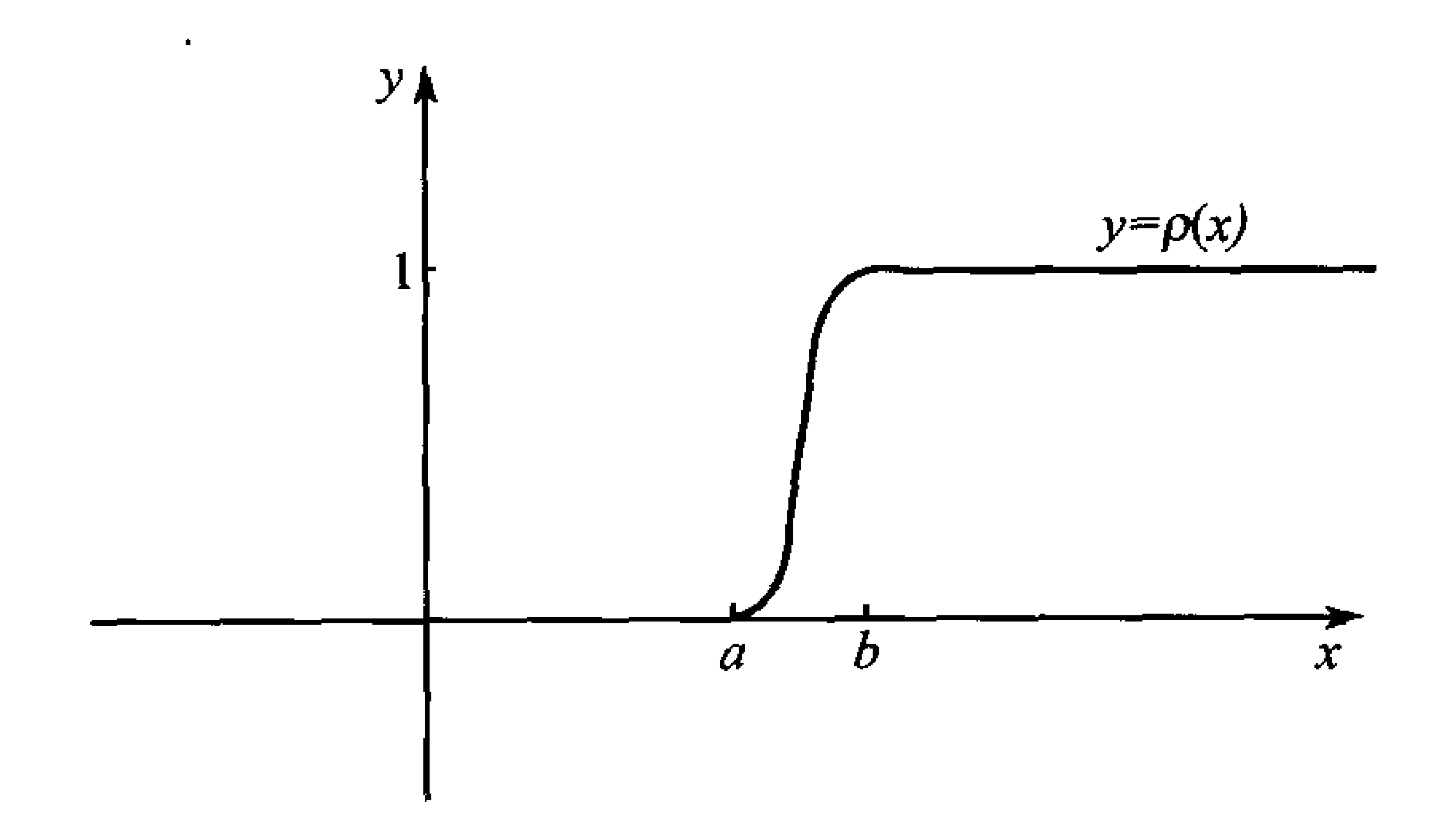
成立. 但当 $n \to \infty$ 时, $\left(\psi^{(n)}(\xi)/n!\right)x^n \to 0$ 不成立.

定理 3.19 对于实直线 $\mathbf{R}$ 上的任意两点 $a, b, a < b$, 存在满足以下条件的 $\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $\rho(x)$:

$$\begin{cases} \text{当 } x \leqslant a \text{ 时} & \rho(x) = 0, \\ \text{当 } a < x < b \text{ 时} & 0 < \rho(x) < 1, \\ \text{当 } x \geqslant b \text{ 时} & \rho(x) = 1. \end{cases} \tag{3.53}$$

证明 利用上面例 3.10 的函数 $\psi(x)$, 令

$$\rho(x) = \frac{\psi(x-a)}{\psi(x-a) + \psi(b-x)},$$



当 $x > a$ 时, $\psi(x-a) > 0$; 当 $x < b$ 时, $\psi(b-x) > 0$. 因此恒有 $\psi(x-a) \geqslant 0$, $\psi(b-x) \geqslant 0$. 所以对于任意 x, 都有 $\psi(x-a)+\psi(b-x) > 0$, 从而, 根据定理 3.18, 函数 $\rho(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. 显然函数 $\rho(x)$ 满足条件 (3.53) 式. □

推论 对于 $\mathbf{R}$ 上的任意 2 点 a, b, $a < b$ 及任意正实数 ε, 存在满足下述条件的$\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $\rho(x)$: 恒有 $0 \leqslant \rho(x) \leqslant 1$, 并且

$$\begin{cases} \text{当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时} & \rho(x) = 1, \\ \text{当 } x \leqslant a-\varepsilon \text{ 时} & \rho(x) = 0, \\ \text{当 } x \geqslant b+\varepsilon \text{ 时} & \rho(x) = 0. \end{cases}$$

证明 令函数 $\rho_1(x)$ 是恒满足 $0 \leqslant \rho_1(x) \leqslant 1$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 并且当 $x \leqslant a-\varepsilon$ 时, $\rho_1(x) = 0$; 当 $x \geqslant a$ 时, $\rho_1(x) = 1$. $\rho_2(x)$ 是恒满足 $0 \leqslant \rho_2(x) \leqslant 1$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 并且当 $x \leqslant b$ 时, $\rho_2(x) = 0$; 当 $x \geqslant b+\varepsilon$ 时, $\rho_2(x) = 1$. 则令

$$\rho(x) = \rho_1(x)(1-\rho_2(x))$$

即可. □

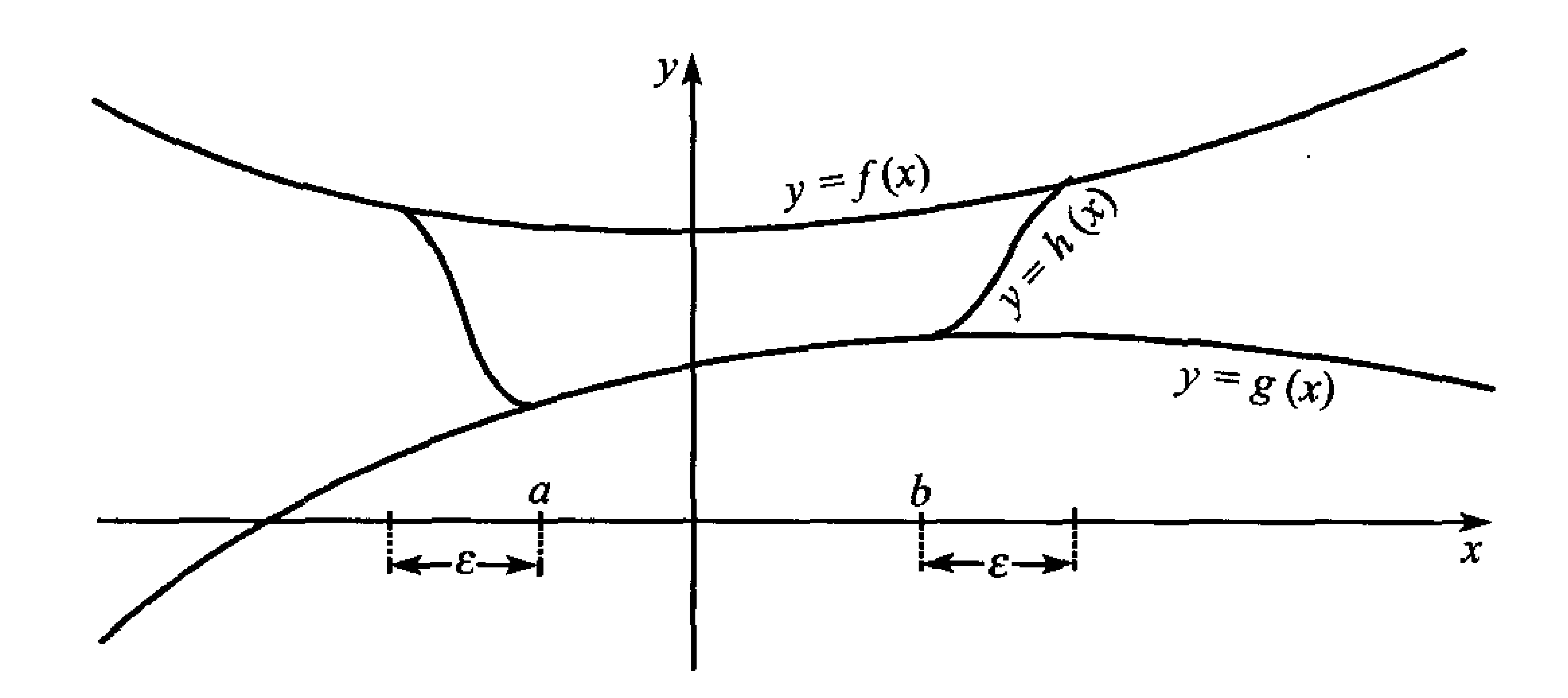
当任意给定 $\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $f(x), g(x)$ 时, 选择一个满足上述推论条件的函数 $\rho(x)$, 并令

$$h(x) = (1-\rho(x))f(x) + \rho(x)g(x),$$

则 $h(x)$ 也是 $\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 并且

$$\begin{cases} \text{当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时} & h(x) = g(x), \\ \text{当 } x \leqslant a-\varepsilon \text{ 时} & h(x) = f(x), \\ \text{当 } x \geqslant b+\varepsilon \text{ 时} & h(x) = f(x). \end{cases}$$

如上所述, 关于 $\mathscr{C}^\infty$ 类的函数, 对给定的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $f(x)$ 只将区间 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 上的部分 "变形". 构造新的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $h(x)$, 在区间 $[a, b]$ 上 $h(x)$ 能和预先给定的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $g(x)$ 一致, 即 $\mathscr{C}^\infty$类函数能够自由变形.



实解析函数不能这样变形. 即:

定理 3.20 设函数 $f(x), g(x)$ 都是开区间 I 上的实解析函数. 如果在区间 I 上的一点 a 的一个邻域上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致, 则在整个区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致.

证明 设 $I=(b,c), b<a<c$. 首先证明在区间 $[a,c)$ 上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. 由假设可知, 存在正实数 ε, 使得当 $a \leqslant x < a+\varepsilon$ 时, $f(x)=g(x)$ 成立. 于是, 令 $a \leqslant x < t$ 时, 满足 $f(x)=g(x)$ 的 $t(a<t\leqslant c)$ 的全体集合为 T, T 的上确界为 $s: s=\sup\limits_{t\in T}(t)$. 则显然, $a+\varepsilon \leqslant s \leqslant c$, 并且如果 $a \leqslant x < s$, 则存在满足 $x<t<s$ 的一点 $t \in T$, 所以 $f(x)=g(x)$. 即在区间 $[a,s)$ 上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致, 为了说明 $s=c$, 我们假设 $s<c$. 则根据假设, 在 s 的某个邻域 $(s-\delta, s+\delta), \delta>0$ 上函数 $f(x), g(x)$ 可以展成以 s 为中心的 Taylor 级数:

$$f(x)=f(s)+\frac{f'(s)}{1!}(x-s)+\cdots+\frac{f^{(n)}(s)}{n!}(x-s)^n+\cdots,$$

$$g(x)=g(s)+\frac{g'(s)}{1!}(x-s)+\cdots+\frac{g^{(n)}(s)}{n!}(x-s)^n+\cdots.$$

因为当 $a \leqslant x < s$ 时, 有 $f(x)=g(x)$, 对于所有的自然数 n, 当 $a \leqslant x < s$ 时, $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)$, 因此根据 $f(x), g(x), f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ 的连续性可知 $f(s)=g(s), f^{(n)}(s)=g^{(n)}(s)$, 即上述的 $f(x)$ 的 Taylor 级数与 $g(x)$ 的 Taylor 级数一致. 所以, 当 $a \leqslant x < s+\delta$ 时, $f(x)=g(x)$, 这与 s 是 T 的上确界相矛盾. 所以 $s=c$, 即在区间 $[a,c)$ 上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. 同理, 在区间 $(b,a]$ 上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. 所以, 在 $I=(b,c)$ 上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致.

上面我们对 I 是有限开区间的情况进行了讨论, 当 $I=(b,+\infty)$ 时, 对于任意的 $c, a<c<+\infty$, 因为在区间 (b,c) 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致, 所以在 I 上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. 当 $I=(-\infty,c)$ 或 $I=(-\infty,+\infty)$ 时, 同样, 易知在 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. □

推论 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在区间 I 上的实解析函数, a 是属于 I 的点. 如果 $f(a)=g(a)$, 并且对于所有的自然数 n, 都有 $f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)$, 那么在 I 全体上, $f(x)$ 和 $g(x)$ 一致.

证明 根据假设可知, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的以 a 为中心的 Taylor 展式一致, 所以, 在 a 的邻域上，$f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. 从而在 I 全体上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一致. □

习　题

21. 通过直接计算极限 $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$ 来证明 x 的函数 x^n(n 是自然数) 的导函数是 nx^{n-1}(3.2 节 d)).

22. 证明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可微, 并且存在一点 ξ, $a<\xi<+\infty$, 使得当 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$ 时, $f'(\xi)=0$(Rolle 定理的扩展).

23. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续, $f(a)=g(a)=0$, 并且在 (a,b) 上可微, $g'(x)\neq 0$. 证明如果存在极限 $l=\lim_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, 则 $\lim_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

24. 当 $a>0,b>0$ 时, 试求极限 $\lim_{x\to+0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ 的值.

25. 证明方程 $x-\cos x=0$ 仅有唯一解.

26. 设 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}=(-1)^nH_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $H_1(x)=2x, H_2(x)=4x^2-2$. 证明 $H_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 代数方程式 $H_n(x)=0$ 有 n 个相异的实根 [应用 Rolle 定理和它的推广 (习题 22)]. 称 $H_n(x)$ 为 **Hermite 多项式.**

27. 设 $f(x)$ 在区间 I 上是 2 阶可微的函数, 并且在区间上恒有 $f''(x)\neq 0$. 中值定理

$$f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h,\quad 0<\theta<1$$

中的 θ 由 x 和 h 来唯一确定, 如果 x 给定, 试证 $\lim_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

28. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是 2 阶可微的, 并且 $f''(x)>0, f(a)<0, f(b)>0$. 则 $b_1=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}, b_2=b_1-\dfrac{f(b_1)}{f'(b_1)}$. 一般地, 设

$$b_n=b_{n-1}-\frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})},\quad n=3,4,5,\cdots,$$

试证数列 $\{b_n\}$ 收敛于方程式 $f(x)=0$ 的介于 a,b 之间的唯一解 (试画函数 $f(x)$ 的图像考虑). 求 $f(x)=0$ 的解的近似值 b_n 的方法称为**Newton 近似法**.

29. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 2 阶可微, 并且 $f''(x)>0$. 证明对于任意的 $x_k, a\leqslant x_k\leqslant b, k=1,2,3,\cdots,n$, 不等式

$$f\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

成立, 并且等号仅限于 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n$ 时成立.

30. 证明正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的几何平均数 $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$ 不超过算术平均数 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$[习题 29 的不等式中, 用 $-\ln x$ 代 $f(x)$].

第4章　积分法

4.1　定积分

虽然我们在高中已经学过积分法，但是本章仍然从定积分的定义开始.

a) 定积分的定义

设 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 在区间 $[a,b]$ 上取 $m+1$ 个点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{m-1} < x_m = b,$$

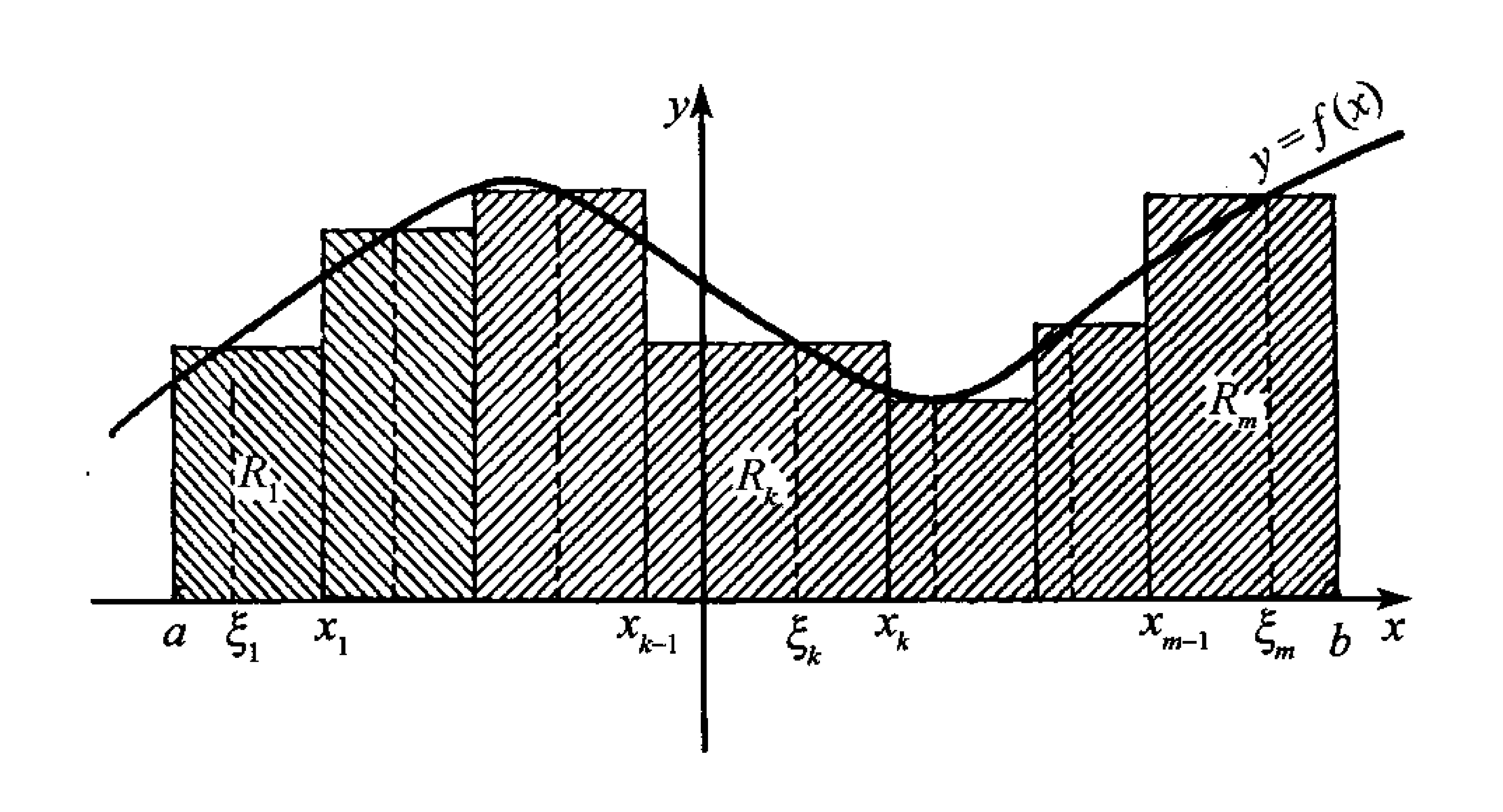
这些点将区间任意分割成 m 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$，$k = 1, 2, 3, \cdots, m$，并且由这 $m+1$ 个点的集合 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, x_m\}$ 确定的分割，叫做分割 Δ. 当分割 Δ 给定时，对每一个 k，取一点 ξ_k，使得 $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$，并设

$$\sigma_\Delta = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

当在区间 $[a,b]$ 内恒有 $f(x) > 0$ 时，因为 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 为矩形

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(\xi_k)] = \{(x,y) | x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, 0 \leqslant y \leqslant f(\xi_k)\}$$

的面积. 所以 σ_Δ 是相互之间没有任何公共内点的 m 个矩形的并集 $R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k \cup \cdots \cup R_m$ (即上图阴影部分) 的面积. 严格说来，我们还没有定义平面上点集合的面积，因此我们就将 σ_Δ 定义为 $R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k \cup \cdots \cup R_m$ 的面积. 根据 2.2



节的定理 2.4, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有最大值和最小值. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最大值为 M_k, 最小值为 μ_k, 并令

$$S_\Delta=\sum_{k=1}^{m}M_k(x_k-x_{k-1}),$$

$$s_\Delta=\sum_{k=1}^{m}\mu_k(x_k-x_{k-1}).$$

因为 $\mu_k\leqslant f(\xi_k)\leqslant M_k$, 所以

$$s_\Delta\leqslant\sigma_\Delta\leqslant S_\Delta. \tag{4.1}$$

由于 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 所以根据 2.2 节的定理 2.3, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致连续的, 即对于任意正实数 ε, 存在一个正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得对 $[a,b]$ 内任意两点 x 和 x',

$$\text{只要}\quad |x-x'|<\delta(\varepsilon),\quad\text{就有}\quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon\ \text{成立}.$$

又因为 $\mu_k=f(\alpha_k),M_k=f(\beta_k)$, $x_{k-1}\leqslant\alpha_k\leqslant x_k,x_{k-1}\leqslant\beta_k\leqslant x_k$, 所以,

$$\text{只要}\quad x_k-x_{k-1}<\delta(\varepsilon),\quad\text{就有}\quad M_k-\mu_k<\varepsilon\ \text{成立}.$$

因此, 如果 m 个区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的区间长度的最大值用

$$\delta[\Delta]=\max_k(x_k-x_{k-1})$$

来表示, 那么只要 $\delta[\Delta]<\delta(\varepsilon)$, 就有

$$S_\Delta-s_\Delta=\sum_{k=1}^{m}(M_k-\mu_k)(x_k-x_{k-1})<\varepsilon\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon(b-a).$$

若将 $\delta(\varepsilon/(b-a))$ 重新改写成 $\delta(\varepsilon)$, 即

$$\text{如果}\quad\delta[\Delta]<\delta(\varepsilon),\quad\text{那么}\quad S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon. \tag{4.2}$$

对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 $\Delta'=\{x_0',x_1',\cdots,x_{n-1}',x_n'\},a=x_0'<x_1'<x_2'\cdots<x_n'=b$, 将 Δ 和 Δ' 的各分点合并, 所得到 $[a,b]$ 的分割设为 $\Delta''=\Delta\cup\Delta'=\{x_0'',x_1{}'',x_2{}'',\cdots,x_{q-1}{}'',x_q{}''\}$, $a=x_0{}''<x_1{}''<\cdots<x_p''<\cdots<x_{q-1}{}''<x_q{}''=b$. 对任一点 p, 取 $\xi_p{}''$, $x_{p-1}{}''\leqslant\xi_p{}''\leqslant x_p{}''$, 并令

$$\sigma_{\Delta''}=\sum_{p=1}^{q}f(\xi_p'')(x_p''-x_{p-1}'').$$

x_0'' x_1'' x_2'' x_3'' x_4'' x_5'' x_6'' x_7'' x_8''

a x_1' x_1 x_2' x_3' x_2 x_3 x_4' b

现假设 $x_{k-1}=x''_h$, $x_k=x''_j$, 则分割 Δ'' 将区间 $[x_{k-1},x_k]$ 分割成 $j-h$ 个子区间 $[x''_{p-1},x''_p]$ $(p=h+1,h+2,\cdots,j)$, 并且因为 $\mu_k\leqslant f\left(\xi''_p\right)$, 所以

$$\mu_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{p=h+1}^{j}\mu_k(x''_p-x''_{p-1})\leqslant\sum_{p=h+1}^{j}f(\xi''_p)(x''_p-x''_{p-1}).$$

因此,

$$s_\Delta\leqslant\sigma_{\Delta''}.$$

同样, 将 Δ 换成 Δ' 进行考虑, 得

$$\sigma_{\Delta''}\leqslant S_{\Delta'}.$$

所以

$$s_\Delta\leqslant S_{\Delta'}.$$

因此, 若考虑区间 $[a,b]$ 的所有分割 Δ, 则相应的 s_Δ 的全体的集合是有上界的. 因此存在上确界:

$$s=\sup_{\Delta}s_\Delta.$$

明显地, $s\leqslant S_\Delta$. 又因为 Δ' 是任意的分割, 所以,

$$s_\Delta\leqslant s\leqslant S_\Delta.$$

因此, 根据 (4.1) 式和 (4.2) 式,

只要 $\quad\delta[\Delta]<\delta(\varepsilon)$, $\quad$ 就有 $\quad|\sigma_\Delta-s|<\varepsilon$ 成立.

即对任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 只要 $\delta[\Delta]<\delta(\varepsilon)$, 相应于分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m\}$, $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$, 无论点 $\xi_k, x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k, k=1,2,\cdots,m$ 如何选取, 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-s\right|<\varepsilon.$$

此时当 $\delta[\Delta]\to 0$ 时, 称 $\sigma_\Delta=\sum_{k=1}^{m}f\left(\xi_k\right)\left(x_k-x_{k-1}\right)$ 的极限为 s, 记为

$$s=\lim_{\delta[\Delta]\to 0}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

当然, 当 $\delta[\Delta]\to 0$ 时, $m\to+\infty$.

定义 4.1 称 $s=\lim\limits_{\delta[\Delta]\to 0}\sum\limits_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**(definite integral), 用符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta[\Delta]\to 0}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}). \tag{4.3}$$

$f(x)$ 叫做定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的**被积函数**(integrand), 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就叫做函数 $f(x)$ 关于 x 从 a 到 b 的**积分**(integrate). 另外 a,b 分别称为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的**下限**和**上限**. x 称为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的**积分变量**.

例 4.1 在区间 $[a,b]$ 上, 当 $f(x)=c$ 是常数时, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{m}c(x_k-x_{k-1})=c(b-a)$, 所以,

$$\int_a^b c\mathrm{d}x=c(b-a).$$

例 4.2 试根据定积分的定义, 直接求解 $\int_0^b x^2\mathrm{d}x$. 当取定分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m\}$, $0=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ 时,

$$3x_{k-1}^2<x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2<3x_k^2,$$

所以根据中值定理, 存在满足

$$3\xi_k^2=x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2,\quad x_{k-1}<\xi_k<x_k$$

的 ξ_k. 又因为

$$3\xi_k^2(x_k-x_{k-1})=(x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2)(x_k-x_{k-1})=x_k^3-x_{k-1}^3,$$

所以

$$3\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{m}(x_k^3-x_{k-1}^3)=b^3.$$

因此,

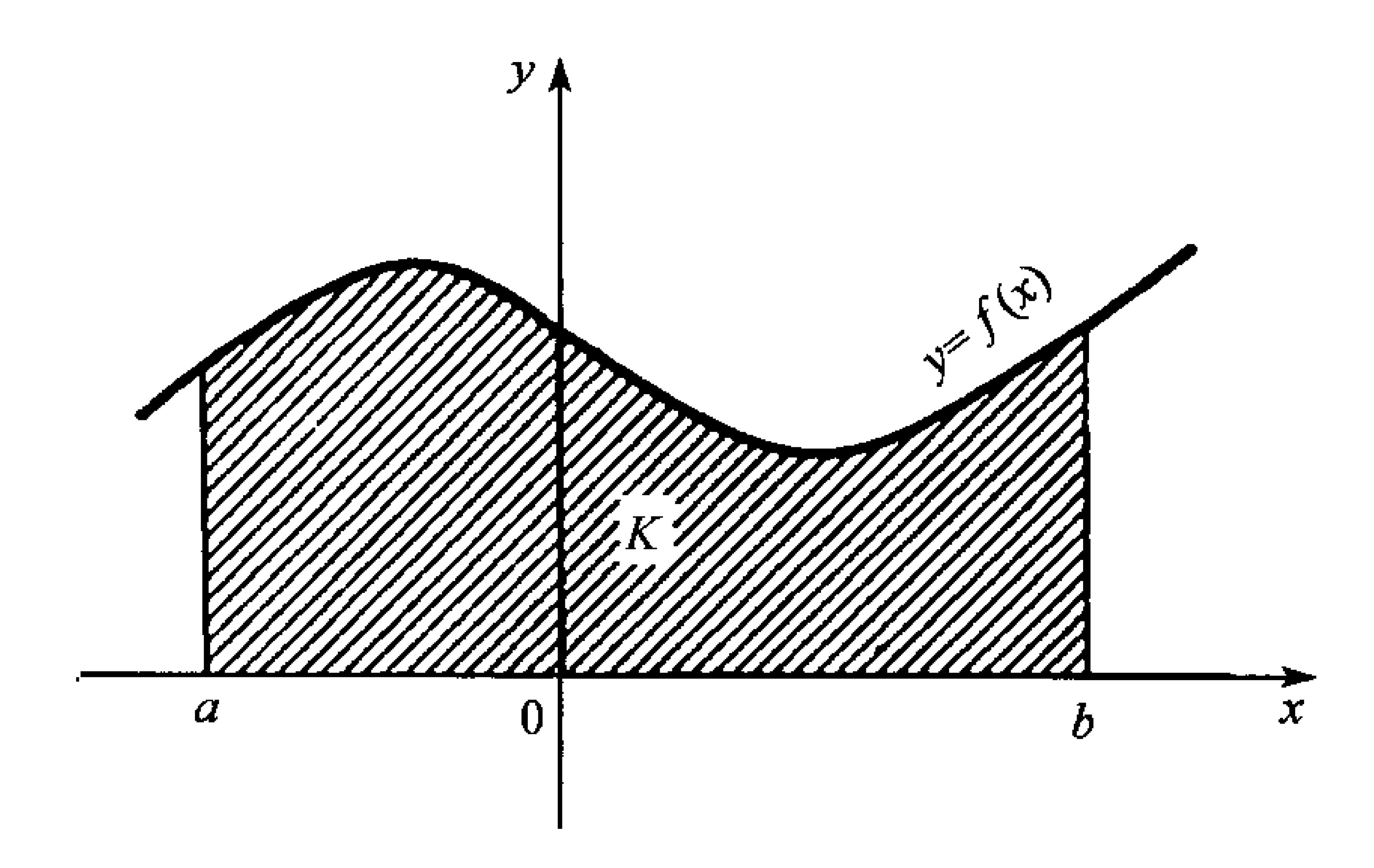
$$\int_0^b x^2\mathrm{d}x=\lim_{\delta[\Delta]\to 0}\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2(x_k-x_{k-1})=\frac{b^3}{3}.$$

一般说来, 根据定义直接求解定积分是非常困难的.

如果按照高中数学所学的内容, 在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$ 恒成立时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于点的集合

$$K=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

的面积. 在现阶段, 我们称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为K 的面积.



注 上述定积分的定义, 不仅仅适用于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的情形. 假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数, 对于区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m\}$, $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$, $f(x)$ 在每个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的上确界和下确界分别设为 M_k 和 μ_k, 并且设

$$S_\Delta=\sum_{k=1}^{m}M_k(x_k-x_{k-1}),$$

$$s_\Delta=\sum_{k=1}^{m}\mu_k(x_k-x_{k-1}).$$

则对于 $[a,b]$ 的任意两个分割 Δ 和 Δ', $s_\Delta\leqslant S_{\Delta'}$. 因此对于 $[a,b]$ 的所有的分割 Δ, 如果 S_Δ 的下确界设为

$$S=\inf_{\Delta}S_\Delta,$$

s_Δ 的上确界设为

$$s=\sup_{\Delta}s_\Delta,$$

那么

$$s\leqslant S.$$

这里, 当等式 $s=S$ 成立时, 称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是**Riemann 可积**. 关于分割 Δ, 如果 $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$, 那么 $\mu_k\leqslant f(\xi_k)\leqslant M_k$, 因此

$$s_\Delta\leqslant\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\leqslant S_\Delta.$$

所以, $s=S$, 即如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 那么

$$\lim_{\delta[\Delta]\to0}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=s=S.$$

上式左边的极限叫做 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分, 用 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta[\Delta]\to0}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

这就是 Riemann 积分法.

在区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定 Riemann 可积. 但是像在 $[a,b]$ 上有界或者除有限个点外是连续的函数, 虽然不是连续函数, 但在 $[a,b]$ 上也是 Riemann 可积的①. 另外, 在 $[a,b]$ 上有界的单调函数即使有无数个不连续点也可在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 但并不是所有的有界函数都是 Riemann 可积的. 例如, 函数 $f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, 当 x 为有理数时 $f(x)=1$, 当 x 为无理数时 $f(x)=0$. 这样的函数 $f(x)$ 不可积. 事实上, 对于函数 $f(x)$, $M_k=1$, $\mu_k=0$, 所以对任意的分割 Δ, $S_\Delta=b-a, s_\Delta=0$, 因此函数 $f(x)$ 不可积.

虽然传统的微积分学中仅涉及 Riemann 积分, 但是本书中除了有限个点以外连续的函数的积分作为广义积分将在 4.3 节中讲述, 而把含无数不连续点的函数的积分让给 Lebesgue 积分处理, 这是因为 Lebesgue 积分论② 出现以后, Riemann 积分法就变成了它的一部分③.

b) 定积分的性质

定理 4.1 设 $f(x), g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

(1) 如果 $a<c<b$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

① 参考高木贞治《解析概論》p.96.

② 参考本书,《現代解析入門》续篇 "測度と積分".

③ 参考高木贞治《解析概論》p.110.

(2) 如果 c_1, c_2 是任意常数, 那么

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

(3) 如果在区间 $[a,b]$ 上, $f(x) \geqslant 0$ 恒成立, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

并且, 若在 $[a,b]$ 上不考虑恒等式 $f(x)=0$ 的情况, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

(4) 如果在区间 $[a,b]$ 上, 恒有 $f(x) \geqslant g(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

并且, 若在 $[a,b]$ 上不考虑等式 $f(x)=g(x)$ 的情况, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(5)

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

证明　(1) 在定积分的定义 4.1 中, 若作为 $[a,b]$ 的分割 Δ, 仅取 c 作为一个分点的分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_m\}$, $x_j = c$, 则

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{x-1}) = \sum_{k=1}^{j} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=j+1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

等式两边当 $\delta[\Delta] \to 0$ 时, 若取极限值, 则可直接推导出 (4.4).

(2) 根据等式

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}(c_1 f(\xi_k) + c_2 g(\xi_k))(x_k - x_{k-1})\\ &= c_1 \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + c_2 \sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),\end{aligned}$$

结果显然成立.

(3) 若在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$ 显然成立. 如果 $c\in[a,b]$, 且 $f(c)>0$, 则因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续函数, 所以当 $c\in[\alpha,\beta]$ 且 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ 时, $f(x)>\gamma=f(c)/2$. 如果取 α,β 为分点的 $[a,b]$ 的一个分割 Δ: $\Delta=\{x_0, x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m\}$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b, x_{j-1}=\alpha, x_h=\beta$, 则

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\geqslant\sum_{k=j}^{h} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\geqslant\sum_{k=j}^{h}\gamma(x_k-x_{k-1})=\gamma(\beta-\alpha).$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta[\Delta]\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\geqslant\gamma(\beta-\alpha)>0.$$

(4) 根据 (2),

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x,$$

所以, 为证明 (4) 把 (3) 中的 $f(x)$ 用 $f(x)-g(x)$ 替代即可.

(5) 因为 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$, 所以根据 (2) 和 (4),

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即 (4.6) 式成立. □

定理 4.2 (中值定理) 如果 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 那么存在点 ξ, 使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi),\quad a<\xi<b \tag{4.7}$$

成立.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以根据 2.2 节的定理 2.4, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 和最小值 μ. 如果 $\mu=M$, (4.7) 式显然成立. 所以, 下面仅考虑 $\mu<M$ 的情况. 在区间 $[a,b]$ 上, $\mu\leqslant f(x)\leqslant M$ 且不考虑恒等式 $f(x)=\mu, f(x)=M$, 所以根据定理 4.1 的 (4),

$$\mu(b-a)=\int_a^b \mu\mathrm{d}x<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b M\mathrm{d}x=M(b-a),$$

即

$$\mu<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<M.$$

令 $\mu = f(\alpha), a \leqslant \alpha \leqslant b, M = f(\beta)$. 由于当 $a \leqslant \beta \leqslant b$ 时, 或者 $\alpha < \beta$ 或者 $\beta < \alpha$, 所以根据中值定理 (2.2 节的定理 2.2), 存在点 ξ 满足

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \alpha < \xi < \beta \text{ 或 } \beta < \xi < \alpha. \qquad \square$$

通常把定理 4.2 称为中值第一定理, 本书中称它为中值定理.

(4.7) 式的左边 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x/(b-a)$, 叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**平均值**(mean value). 如果 $x_k = a + k(b-a)/m, k = 0,1,2,\cdots,m$, 将区间 $[a,b]$ 分为 m 等分, 则 $x_k - x_{k-1} = (b-a)/m$. 所以

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k).$$

因此,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k).$$

即若将区间 $[a,b]$ 分成 m 等份, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x/(b-a)$ 是在等分点 x_k 处所有函数值 $f(x_k)\,(k=1,2,\cdots,m)$ 的平均值在 $m\to\infty$ 时的极限值.

下面的定理是上述中值定理的推广.

定理 4.3 设 $f(x), g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 如果在开区间 (a,b) 上恒有 $g(x) > 0$, 那么存在点 ξ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad a < \xi < b. \tag{4.8}$$

证明 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别是 M 和 μ. 当 $M = \mu$ 时, (4.8) 式显然成立. 所以, 我们下面仅考虑 $M > \mu$ 的情况. 在区间 $[a,b]$ 上, $\mu g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, 并且因为不考虑恒等式 $\mu g(x) = f(x)g(x)$ 和 $f(x)g(x) = Mg(x)$, 所以根据定理 4.1 的 (4),

$$\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

设 $\gamma = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\mu < \frac{1}{\gamma}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < M.$$

因此, 根据中值定理, 存在 ξ 满足

$$f(\xi)=\frac{1}{\gamma}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad a<\xi<b. \qquad \square$$

4.2 原函数和不定积分

a) 原函数和不定积分

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, a,b,c 是属于 I 的 3 点. 根据定理 4.1 的 (1), 若 $a<c<b$, 则等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{4.9}$$

成立. 但如果 $b<a$, 那么定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$

如果 $b=a$, 那么定义

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而, 等式 (4.9) 成立就与 a,b,c 的大小无关.

[证明] 当 $a=c\leqslant b$ 及 $a\leqslant c=b$ 时, (4.9) 显然成立. 为便于观察, 将 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)\mathrm{d}x$ 略去不写, 则当 $c\leqslant a\leqslant b$ 时, $\int_c^b=\int_c^a+\int_a^b$, 因此

$$\int_a^b=-\int_c^a+\int_c^b=\int_a^c+\int_c^b.$$

当 $c\leqslant b\leqslant a$ 时, $\int_c^a=\int_c^b+\int_b^a$, 因此,

$$\int_a^b=-\int_b^a=-\int_c^a+\int_c^b=\int_a^c+\int_c^b.$$

同理, 在其他情况下, (4.9) 一样成立. $\square$

假定 $a\in I$, 则对 I 中的任意一点 ξ, 若令

$$F(\xi)=\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.10}$$

则对每一个 $\xi \in I$, 确定与 $F(\xi)$ 相对应的函数 $F(x)$. 这样的函数用 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 来表示:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

其中, 右侧 $\int_a^x$ 的 x 是函数 $F(x)$ 的独立变量, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 x 是积分变量. 虽然都用相同的字母 x 来表示, 但是积分变量 x 与独立变量 x 是完全不同的. 独立变量 x 若代入实数 ξ, 则 (4.11) 式变成 (4.10) 式. 如果积分变量不是用 x 而是用其他字母如 t 来表示, 并且将 (4.10) 式写成

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

那么, 独立变量和积分变量的区别就一目了然了.

严格说来, 如 2.1 节所述, 变量 x 表示的是一个符号, 在它的位置上可以代入属于定义域 I 内任意实数 ξ, 相当于 (), 所以 (4.11) 式的右侧是 $\int_a^{()} f(x)\mathrm{d}x$, 它作为定积分就没有意义了. 因此将 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 定义为每一个 $\xi \in I$ 所对应的函数 $\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$. 只是出于一般的习惯, 将属于 I 的实数和变量用相同的字母 x 来表示. (4.11) 式可以理解成, 对于属于 I 的任意实数 x, 函数 $F(x)$ 在 x 处的值 $F(x)$ 等于定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$.

定理 4.4 设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, $a \in I$. 对于任意 $x \in I$, 如果

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x,$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x). \tag{4.12}$$

证明 根据 (4.9) 式,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x,$$

所以, 当 $h > 0$ 时, 根据中值定理 (定理 4.2), 存在满足

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$$

的点 $\xi, x < \xi < x + h$. 又当 $h < 0$ 时, 存在满足

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|h|}\int_{x-|h|}^x f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$$

的点 $\xi, x+h<\xi<x$. 所以, 当 $h \neq 0$ 时,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi), \quad \xi=x+\theta h, \quad 0<\theta<1.$$

因此,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{\xi \to x} f(\xi)=f(x),$$

即 (4.12) 式成立. □

因为 $\int_x^a f(x) \mathrm{d}x=-\int_a^x f(x) \mathrm{d}x$, 所以根据 (4.12) 式,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^a f(x) \mathrm{d}x=-f(x). \tag{4.13}$$

一般地, 给定一个定义在 I 上的函数 $f(x)$, 设 $F(x)$ 以 $f(x)$ 作为导函数, 即 $F'(x)=f(x)$, 此时定义在区间 I 上的函数 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的**原函数**(primitive function). 当然, 给定函数 $f(x)$, 它不一定存在原函数. 例如, $f(x)$ 在区间 I 的内点 c 处不连续, 并且 $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ 同时存在, 而 $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$, 则根据 3.3 节定理 3.10 的推论相关的结果, 函数 $f(x)$ 不存在原函数.

如果 $f(x)$ 存在原函数, 那么它的原函数除加法常数 (additive constant) 外唯一确定. 即如果 $F_0(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 那么 $f(x)$ 的任意原函数可以表示为

$$F(x)=F_0(x)+C,$$

其中 C 是常数. 事实上,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x)-F_0(x))=F'(x)-F_0'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

所以根据 3.3 节的定理 3.6, $F(x)-F_0(x)$ 必是常数.

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, $a \in I$. 则根据 (4.12) 式, 在 I 上定义的 x的函数 $\int_a^x f(x) \mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的原函数. 因此, $f(x)$的任意原函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x)=\int_a^x f(x) \mathrm{d}x+C, \quad C\text{是常数}. \tag{4.14}$$

其中, 右边的 C 叫做**积分常数**.

对 I 内任意 2 点 b 和 c 应用 (4.9) 式, 由 (4.14) 式, 得

$$F(b)-F(c)=\int_a^b f(x) \mathrm{d}x-\int_a^c f(x) \mathrm{d}x=\int_c^b f(x) \mathrm{d}x.$$

即下面结论成立：

定理 4.5　设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{4.15}$$

(4.15) 式叫做**微积分的基本公式**.

定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 的原函数也可称为 $f(x)$ 的**不定积分**(indefinite integral). 用符号 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 来表示.

注　不定积分的定义似乎还不统一.《岩波数学辞典第 3 版》p. 522 中将 x 的函数 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 的不定积分. 高木贞治《解析概論》pp. 101–102 页中说当没有指定 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 的下限 a 时, 记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 并表示 $f(x)$ 的不定积分. 本书采用了藤原松三郎《微分積分学 I》p. 293 中的定义, 即不定积分就是原函数.

b) 用初等函数表示的原函数

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
$x^\alpha(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}(x \neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{1-x^2}(x \neq \pm 1)$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}(\lvert x\rvert > 1)$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
e^x	e^x
$a^x(a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

从例 4.2 可知, 根据定积分的定义直接求解 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 比较困难, 但如果知道 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$, 就可以由基本公式 (4.12) 直接求解定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 上表中给出了由初等函数来表示的基本原函数.

此表的右侧的函数是左侧函数所对应的原函数. 这可通过对右侧的函数进行

微分获得验证. 例如, 对第二行的 $\ln|x|$ 进行微分, 则当 $x>0$ 时, 根据 (3.9) 式, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\ln x=1/x$, 当 $x<0$ 时, $y=|x|=-x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln y=-\frac{1}{y}=\frac{1}{x},$$

即, 当 $x\neq 0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{1}{x}.$$

对任意的可微函数 $f(x)$, 若 $y=f(x)$, 则当 $y\neq 0$ 时, 根据该结果得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)|=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln|y|=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{1}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad f(x)\neq 0. \tag{4.16}$$

右侧包含 ln 的函数的导函数都可以用公式 (4.16) 求解. 例如对于 $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$, 若令 $y=x^2-1$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-1}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^{1/2}=2x\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+\sqrt{x^2-1})=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

显然, 右侧不包含 ln 的函数的导函数恰好是与其相对应的左侧的函数.

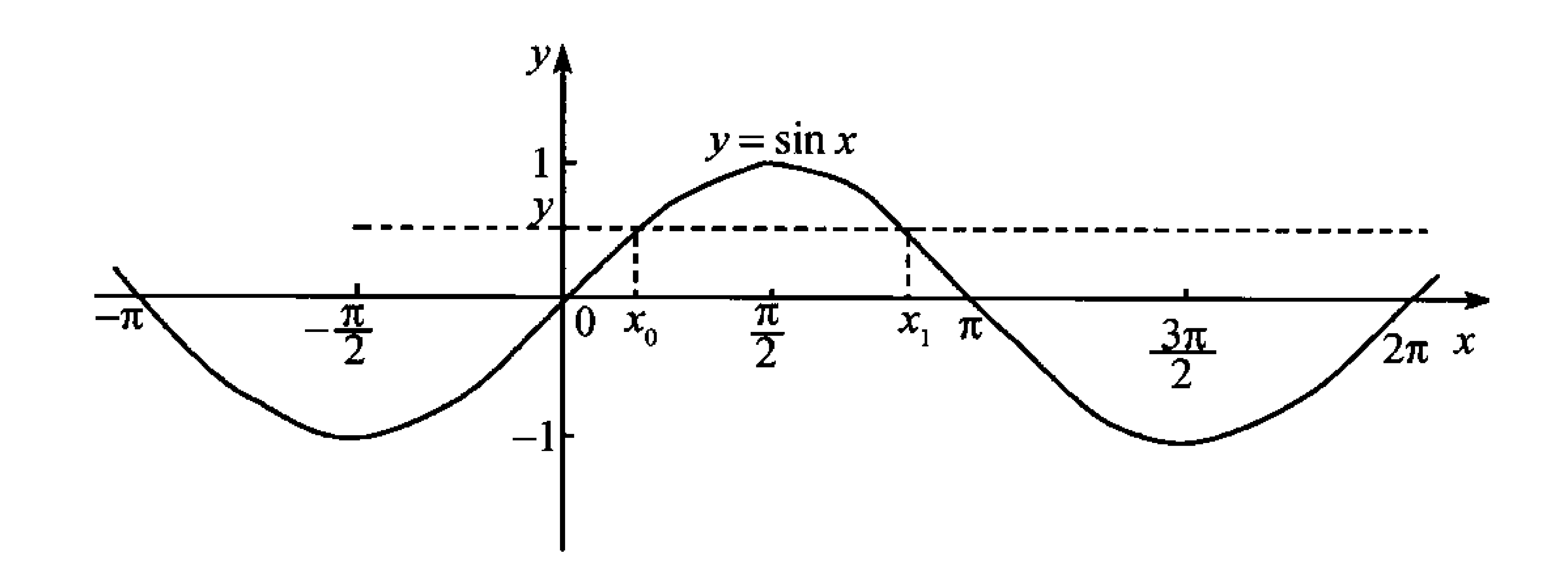
下面讨论与原函数相关的**反三角函数**, 即三角函数的反函数. 令

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x,$$

如 2.4 节 a) 中所述, $\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递减, 所以 $\sin x$ 在区间 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上单调递增. 若假设在区间 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上函数 $f(x)=\sin x$, 则 $f(-\pi/2)=-1$, $f(\pi/2)=1$. 所以根据 2.2 节的定理 2.7, $y=f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是连续单调递增函数, 并且其值域为 $[-\pi/2,\pi/2]$. 该反函数 $f^{-1}(y)$ 用 $\mathrm{Arcsin}\,y$ 表示.

对任意给定的一个实数 $y, -1\leqslant y\leqslant 1$, 满足方程式 $\sin x=y$ 的实数 x 用 $x=\arcsin y$ 表示. $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且 $\sin(x+\pi)=-\sin x$, 所以对于任意整数 m,

$$\sin x=(-1)^m\sin(x-m\pi).$$



若 $\sin x = y, -\pi/2 + m\pi \leqslant x \leqslant \pi/2 + m\pi$, 则 $\sin(x - m\pi) = (-1)^m y, -\pi/2 \leqslant x - m\pi \leqslant \pi/2$, 所以

$$x = \mathrm{Arcsin}((-1)^m y) + m\pi.$$

若 $\sin x = y$, 则 $\sin(-x) = -y$. 所以 $\mathrm{Arc}\sin(-y) = -\mathrm{Arc}\sin y$, 因此上式可改写成

$$x = (-1)^m \mathrm{Arc}\sin y + m\pi.$$

从而, 在条件 $-\pi/2 + m\pi \leqslant x \leqslant \pi/2 + m\pi$ 之下, 函数 $x = \arcsin y$ 成为 y 的函数 $(-1)^m \mathrm{Arc}\sin y + m\pi$. 若没有该条件限制, 则

$$\arcsin y = (-1)^m \mathrm{Arc}\sin y + m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

即对于 $\arcsin y$ 的每个实数 y, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, 有无数个实数 $x_m = (-1)^m \mathrm{Arc}\sin y + m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 与之对应, $\arcsin y$ 是 y 的多值函数. $\arcsin y$ 虽然不是 2.1 节中定义的意义下的函数, 但它也可以看成是对每一个实数 y, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, 对应无数个值 $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \cdots, x_m, x_{-m} \cdots$ 的一种函数, 称 $\arcsin y$ 为 y 的**多值函数**(many-valued function). 并且把 $\mathrm{Arc}\sin y$ 称为 $\arcsin y$ 的**主值**(pricipal value). $\arcsin y$ 也可以写成 $\sin^{-1} y$.

关于 $\cos x$ 的反函数也可同样讨论. 即在区间 $[0, \pi]$ 上, x 的函数 $y = \cos x$ 的反函数用 $\mathrm{Arc}\cos y$ 表示. $\mathrm{Arc}\cos y$ 在 $[-1, 1]$ 上是连续单调递减函数, 值域为 $[0, \pi]$. 对于实数 $y, -1 \leqslant y \leqslant 1$, 满足方程 $\cos x = y$ 的 x 表示为 $x = \arccos y$, 则

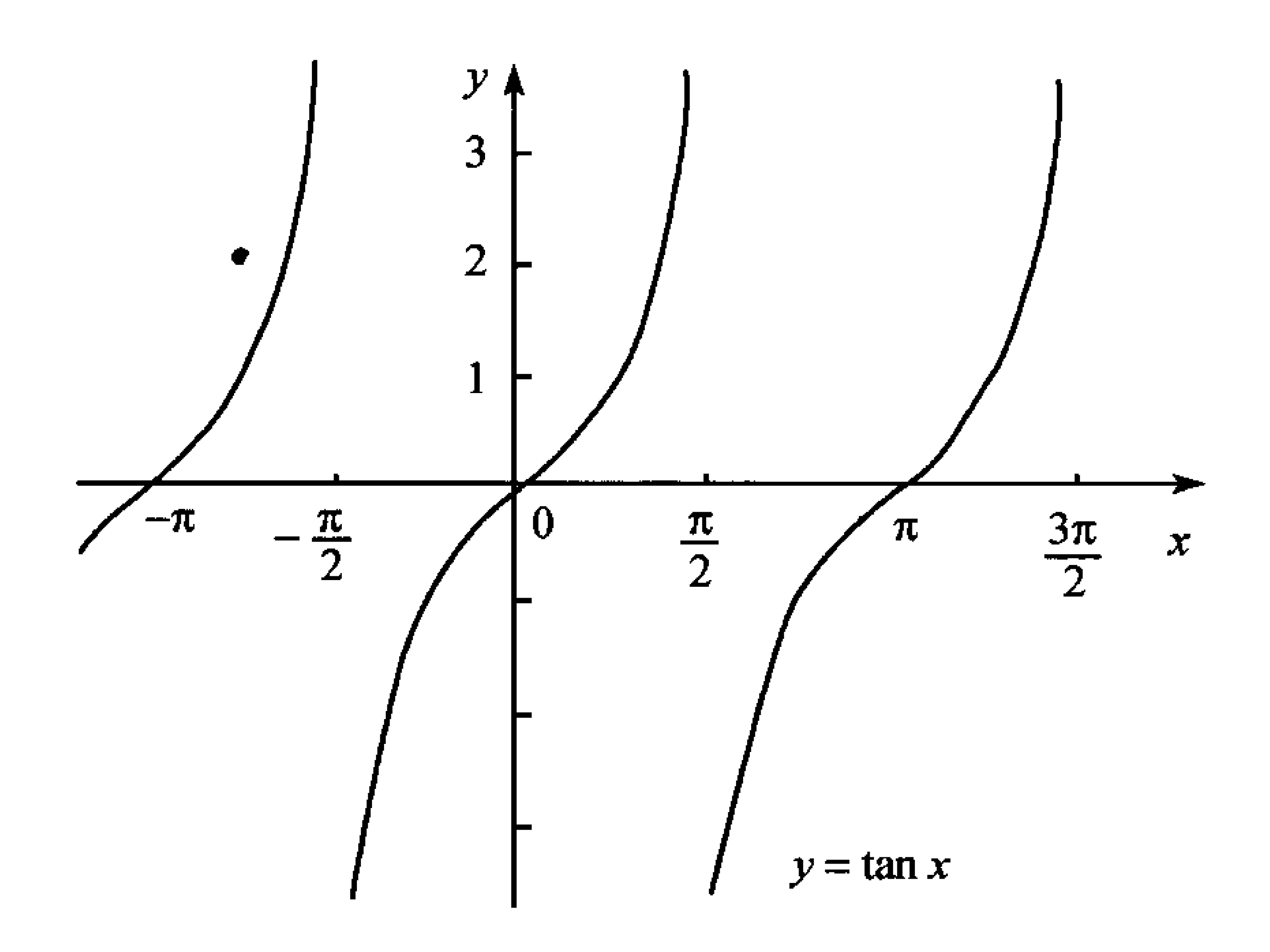
$$\arccos y = (-1)^m \mathrm{Arc}\cos y + m\pi + (1 - (-1)^m)\pi/2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

称 $\mathrm{Arc}\cos y$ 为 $\arccos y$ 的主值.

根据 (3.27) 式, $\tan x = \sin x / \cos x$ 在开区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

所以, 根据 3.3 节的定理 3.6, $\tan x$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上单调递增.



又因为 $\lim\limits_{x\to-\pi/2+0} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} \tan x = +\infty$, 所以如果在开区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上 x 的函数 $y = \tan x$ 的反函数用 $\mathrm{Arc}\tan y$ 来表示, 那么根据定理 2.7, $\mathrm{Arc}\tan y$ 是在数轴 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 上的连续单调递增函数, 其值域为 $(-\pi/2, \pi/2)$. 对于任意实数 y, 满足方程式 $\tan x = y$ 的 x 用 $x = \arctan y$ 表示. 对于任意整数 m, 因为

$$\tan x = \tan(x - m\pi),$$

所以,

$$\arctan y = \mathrm{Arc}\tan y + m\pi, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots.$$

即 $x = \arctan y$ 是在每个开区间 $(-\pi/2 + m\pi, \pi/2 + m\pi)$ 上分别取值的多值函数.

另外, 若 $y = \sin x$, 则在开区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \cos x > 0$. 因此, 根据反函数的微分法 (3.2 节定理 3.4), $x = \mathrm{Arc}\sin y$ 在开区间 $(-1, 1)$ 上关于 y 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{Arc}\sin y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

若将 y 换成 x, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Arc}\sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1. \tag{4.17}$$

当 $x = -1$ 或 $x = 1$ 时, $\mathrm{Arc}\sin x$ 不可微. 根据 (4.17) 式, 可直接得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \mathrm{Arc}\sin x, \quad |x| < 1. \tag{4.18}$$

若 $y=\tan x$, 则因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1/\cos^2 x$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{Arc}\tan y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}=\cos^2 x=\frac{1}{\tan^2 x+1}=\frac{1}{y^2+1}.$$

若将 y 换成 x, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Arc}\tan x=\frac{1}{x^2+1}. \tag{4.19}$$

因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\mathrm{Arc}\tan x. \tag{4.20}$$

c) 分部积分法

设 $f(x),g(x)$ 都是区间 I 上的连续可微函数. 则根据 (3.11) 式,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

所以,

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

因此,

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.21}$$

一般地, 当 $h(x)$ 在 I 上连续时, 对 I 上任意两点 $a,b,h(b)-h(a)$ 可用符号 $[h(x)]_a^b$ 或 $h(x)|_a^b$ 表示:

$$[h(x)]_a^b=h(x)|_a^b=h(b)-h(a).$$

若采用此记法, 则根据 (4.21) 式,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.22}$$

我们把 (4.21) 式和 (4.22) 式叫做**分部积分**(integration by parts) 公式.

例 4.3 若在 (4.21) 式中令 $g(x)=x$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int xf'(x)\mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

若令 $f(x)=\ln x$, 则 $f'(x)=1/x$, 所以

$$\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x.$$

另外, 当 $|x|<1$ 时, 若令 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, 则

$$xf'(x)=\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

所以, 根据 (4.18) 式得,

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{Arc}\sin x.$$

因此,

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{Arc}\sin x),\quad |x|<1. \tag{4.24}$$

例 4.4 设 n 为自然数, $S_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\mathrm{d}x$, 并且设 $f(x)=(\sin x)^{n-1}$, $g(x)=-\cos x$, 则 $(\sin x)^n=f(x)g'(x)$, 所以由分部积分公式 (4.22) 式,

$$\begin{aligned}S_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\mathrm{d}x&=[-(\sin x)^{n-1}\cos x]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\&=(n-1)S_{n-2}-(n-1)S_n.\end{aligned}$$

因此 $nS_n=(n-1)S_{n-2}$, 即

$$S_n=\frac{n-1}{n}S_{n-2}. \tag{4.25}$$

此式中, 若令 $S_0=\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}x=\pi/2$, 则当 $n\geqslant 2$ 时成立. 因为 $S_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=1$, 所以当分别考虑 n 为奇数和偶数时, 得

$$S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$
$$S_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

因此,

$$2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2=2^n n!,$$
$$(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3=\frac{(2n+1)!}{2^n n!},$$

所以,

$$\begin{cases}S_{2n}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] S_{2n+1}=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.\end{cases} \tag{4.26}$$

当 $0 < x < \pi/2$ 时, $(\sin x)^n > (\sin x)^{n+1}$, 所以根据定理 4.1 的 (4), $S_n > S_{n+1}$. 因此由 (4.25) 式得

$$1 > \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} > \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = 1. \tag{4.27}$$

根据 (4.26) 式, $S_{2n+1}S_{2n} = \pi/(4n+2)$, 再利用 (4.27) 式得

$$\lim_{n\to\infty} n(S_{2n+1})^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+2} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \pi = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n+1} = \sqrt{\pi}/2. \tag{4.28}$$

此结果与 (4.27) 式和 (4.26) 式相结合, 可得

$$\sqrt{\pi}/2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n} = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

因此,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}. \tag{4.29}$$

d) Taylor 公式

根据分部积分法, 也可以证明 Taylor 公式 (3.39) 式. 设 $f = f(x), g = g(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 阶连续可微函数, 若对它们的 k 阶导函数 $f^{(k)} = f^{(k)}(x), g^{(k)} = g^{(k)}(x)$ 重复使用分部积分法, 则

$$\begin{aligned}
\int f g^{(n)} \mathrm{d}x &= f g^{(n-1)} - \int f' g^{(n-1)} \mathrm{d}x \\
&= f g^{(n-1)} - f' g^{(n-2)} + \int f'' g^{(n-2)} \mathrm{d}x \\
&= f g^{(n-1)} - f' g^{(n-2)} + f'' g^{(n-3)} - \int f''' g^{(n-3)} \mathrm{d}x \\
&= \cdots\cdots \\
&= f g^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

即

$$\int f g^{(n)} \mathrm{d}x = f g^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g \mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

此处约定 $g^{(0)}=g$. 在 I 上任取一点 b, 使得

$$g=g(x)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}=-\frac{1}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}.$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x-b)^{n-1}=(n-1)(n-2)\cdots(n-k)(x-b)^{n-1-k},$$

所以,

$$g^{(k)}=-\frac{1}{(n-k-1)!}(x-b)^{n-1-k}.$$

因此,

$$g^{(n-1-k)}=-\frac{1}{k!}(x-b)^k=-\frac{(-1)^k}{k!}(b-x)^k,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1,$$

特别地, $g^{(n-1)}=-1$, 或 $g^{(n)}=0$. 所以根据 (4.30) 式,

$$0=-f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k+\int\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

当在区间 I 上取定一点 a 时, 从此式直接得

$$0=\left[-f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k\right]_a^b+\int_a^b\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

即

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

若将积分变量 x 换成 t,b 换成 x, 则

$$\begin{aligned}f(x)=&f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n,\\R_n=&\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.31}$$

当 $a<x$ 时, 若 $a\leqslant t<x$, 则 $(x-t)^{n-1}>0$. 所以根据定理 4.3, 存在满足

$$\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t=f^{(n)}(\xi)\int_a^x(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t,\quad a<\xi<x$$

的 ξ. 当 $x<a$ 时, 存在满足

$$\int_x^a f^{(n)}(t)(t-x)^{n-1}\mathrm{d}t=f^{(n)}(\xi)\int_x^a(t-x)^{n-1}\mathrm{d}t,\quad x<\xi<a$$

的 ξ. 又因为 $(t-x)^{n-1}=(-1)^{n-1}(x-t)^{n-1}$, 所以

$$\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t=f^{(n)}(\xi)\int_a^x (x-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

总之, 无论哪种情况, 都存在满足

$$\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t=f^{(n)}(\xi)\int_a^x (x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$\xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1$$

的 ξ. 因为 $\int_a^x (x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t=(1/n)\,(x-a)^n$, 所以

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n,\quad \xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1. \tag{4.32}$$

于是 Taylor 公式 (3.39) 式获得证明.

虽然对 Taylor 公式的证明, 积分法要比 3.4 节 c) 中的微分法更加通俗易懂, 但是用积分法时, 却需要假设 $f(x)$ 是 n 阶连续可微函数. 而在 3.4 节 c) 中 $f(x)$ 是 n 阶可微函数即可. 这种在假设上的细微差别, 在应用上却并不是那么重要. 与此相比, (4.31) 式中用定积分表示的余项 R_n 更值得研究. 为了从 R_n 的积分表示导出 (4.32) 式, 可将 $\int_a^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$ 的被积函数看成是 $f^{(n)}(t)$ 和 $(x-t)^{n-1}$ 的积, 再利用定理 4.3 来获得. 而被积分函数如果看成是 $f^{(n)}(t)\,(x-t)^q$ 和 $(x-t)^{n-1-q}$ $(0\leqslant q\leqslant n-1$ 且 q 为整数) 的积, 那么利用定理 4.3, 可知存在 ξ 满足

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t&=f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^q\int_a^x (x-t)^{n-1-q}\mathrm{d}t\\&=f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^q\frac{(x-a)^{n-q}}{n-q},\\ \xi&=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

因为 $x-\xi=(1-\theta)\,(x-a)$, 所以

$$R_n\frac{f^{(n)}(\xi)(1-\theta)^q}{(n-1)!(n-q)}(x-a)^n,\quad \xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

这正是 Schlömilch 的余项 (3.42) 式.

4.3 广义积分

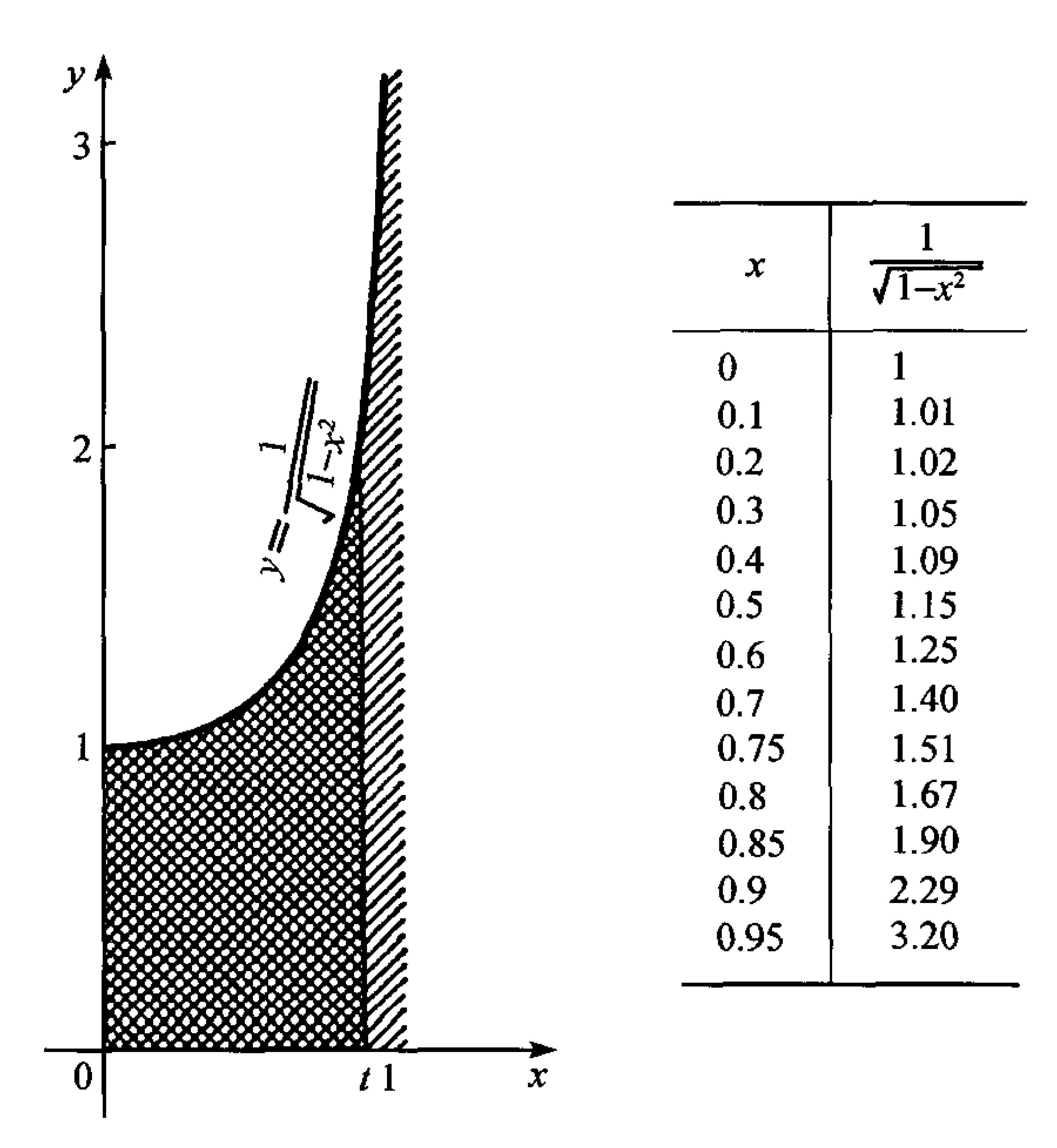
4.1 节中定义了区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 在本节中, 将推广定积分的定义, 研究在 $[a,b]$ 上有有限个不连续点, 甚至在如 $[a,+\infty)$ 这样的**无**

限区间内定义的函数 $f(x)$ 的定积分. 无限区间是指无界的区间, 相应地, **有限区间**就是有界的区间.

a) 积分定义的扩张

首先, 从在区间 $[a,b)$ 上连续但在 $[a,b]$ 上未必连续的函数 $f(x)$ 的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义开始讨论.

例 4.5 x 的函数 $1/\sqrt{1-x^2}$, 在区间 $[0,1)$ 上连续并且 $\lim\limits_{x\to 1-0}(1/\sqrt{1-x^2})=+\infty$.



x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
0	1
0.1	1.01
0.2	1.02
0.3	1.05
0.4	1.09
0.5	1.15
0.6	1.25
0.7	1.40
0.75	1.51
0.8	1.67
0.85	1.90
0.9	2.29
0.95	3.20

由上图可知, 显然此函数的积分应定义为

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

则根据 (4.18) 式,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-0}\operatorname{Arc}\sin t = \operatorname{Arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

一般地, 如果在区间 $[a,b)$ 上连续的函数 $f(x)$ 存在极限 $\lim\limits_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, 那么定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.33}$$

同样, 如果在区间 $(a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 存在极限 $\lim\limits_{s\to a+0}\int_s^b f(x)\mathrm{d}x$, 那么定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to a+0}\int_s^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.34}$$

如果在区间 (a,b) 上连续的函数 $f(x)$ 存在 $\lim\limits_{\substack{t\to b-0\\ s\to a+0}}\int_s^t f(x)\mathrm{d}x$, 那么定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{t\to b-0\\ s\to a+0}}\int_s^t f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.35}$$

这里, (4.35) 式确定了对应于任意的正实数 ε 的一个正实数 $\delta(\varepsilon)$, 当 $b-\delta(\varepsilon) < t < b, a < s < a+\delta(\varepsilon)$ 时, 蕴涵着

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_s^t f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

成立, 但若确定一点 $c, a < c < b$, 则

$$\int_s^t f(x)\mathrm{d}x = \int_s^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^t f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\lim_{\substack{t\to b-0\\ s\to a+0}}\int_s^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to a+0}\int_s^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)\mathrm{d}x,$$

因此, (4.35) 式可改写为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to a+0}\int_s^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.36}$$

在 (4.33) 式、(4.34) 式和 (4.35) 式中定义的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为**广义积分**(improper integral). 当广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在时, 也就是 (4.33) 式、(4.34) 式或者 (4.35) 式右侧的极限存在时, 称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**. 当广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在时, 称广义积分**发散**. 把不存在的东西, 称为发散, 虽然从理论上来讲是不恰当的, 但这与无穷级数是发散的称法类似, 此时可以理解为广义积分形式上是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 但 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值不存在.

当 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续时，我们已经定义了定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，所以需要验证广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 一致. 为此，对给定的一点 c, $a<c<b$，令 $F(t)=\int_c^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F(t)$ 是 $[a,b]$ 上关于 t 的连续函数. 例如 (4.33) 式的右边变为

$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b-0}(F(t)-F(a))=F(b)-F(a),$$

与定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 一致.

同样，假如 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的两个定义 (4.33) 式和 (4.35) 式是一致的.

当 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上除了有限个点 $c_1,c_2,\cdots,c_m$, $a<c_1<c_2<\cdots<c_m<b$ 外连续时，若广义积分 $\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x, \int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x,\cdots,\int_{c_m}^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{c_m}^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.37}$$

并称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. 此时，$f(x)$ 在 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 上没有定义也可以. 另外，即使 $f(x)$ 在 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 有定义，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也与 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 上 $f(x)$ 的值 $f(c_1),f(c_2),\cdots,f(c_m)$ 无关. 当 $f(x)$ 在 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 上没有定义时，任意选实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得 $f(c_1)=\alpha_1, f(c_2)=\alpha_2,\cdots,f(c_m)=\alpha_m$，即将 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 追加到 $f(x)$ 的定义域中，则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也不会改变. 因此，在考察区间 (a,b) 上除有限个点 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 外连续的函数 $f(x)$ 的广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时，函数 $f(x)$ 在 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 上即使没有定义也可以.

进而，若函数 $f(x)$ 是对所有的点 $t, t>a$，在 (a,t) 上除至多有限个点外连续的函数，且当广义积分 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时，极限 $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.38}$$

并且称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 同样, 可以定义广义积分：

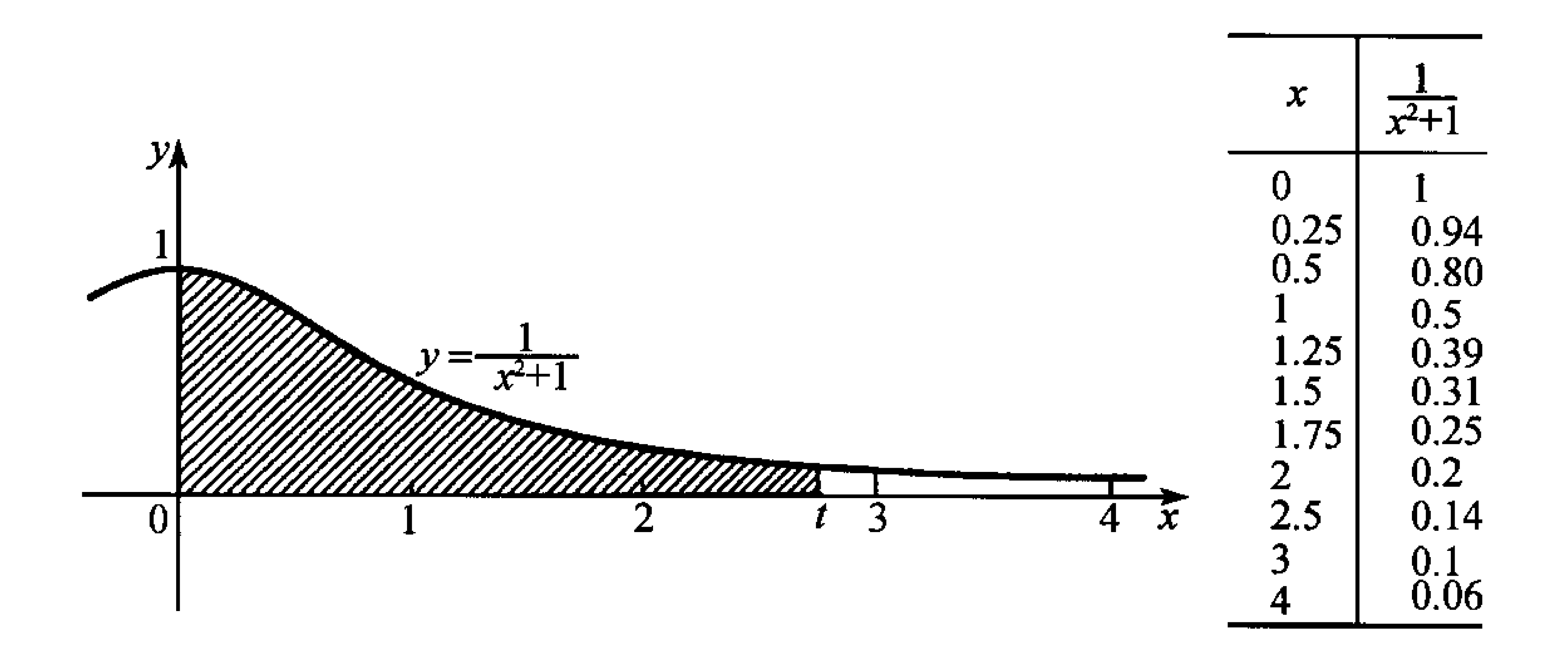
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.39}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.40}$$

特别地, 当 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续时, (4.38) 式右边的积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 是定义 4.1 意义上的定积分.

例 4.6 函数 $1/(x^2+1)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上关于 x 的连续函数. 根据 (4.20) 式, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \mathrm{Arc}\tan x$, 所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{t\to+\infty}\mathrm{Arc}\tan t = \frac{\pi}{2}.$$



x	$\frac{1}{x^2+1}$
0	1
0.25	0.94
0.5	0.80
1	0.5
1.25	0.39
1.5	0.31
1.75	0.25
2	0.2
2.5	0.14
3	0.1
4	0.06

b) 广义积分的性质

定理 4.1 证明的定积分的性质同样适用于广义积分.

定理 4.6 设 $f(x), g(x)$ 是区间 (a,b) 上除至多有限个点外连续的函数, 且广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(1) 若 $a<c<b$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.41}$$

(2) 若 c_1, c_2 为常数, 则广义积分 $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\mathrm{d}x = c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + c_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.42}$$

(3) 若在区间 (a,b) 上, 恒有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \tag{4.43}$$

并且 (4.43) 式中, 仅当 $f(x), g(x)$ 除不连续点外, 恒有 $f(x) = g(x)$ 时, 等号才成立.

(4) 进而, 若广义积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{4.44}$$

证明 首先假设在区间 (a,b) 上, $f(x), g(x)$ 同为连续函数.

(1) 当 $a<c<b$ 时, 根据 (4.36) 式, 等式 (4.41) 式显然成立.

(2) 因为广义积分 $\int_a^b$ 是定积分 $\int_s^t, a<s<t<b$, 当 $t \to b-0, s \to a+0$ 时的极限, 所以根据定理 4.1 的 (2), 广义积分 $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 同理, 当 (a,b) 上恒有 $f(x) \geqslant g(x)$ 时, 根据定理 4.1 的 (4) 可得不等式 (4.43) 式成立. 现假设在 (a,b) 上, 恒等式 $f(x) = g(x)$ 不成立, 并且设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 (a,b) 上连续, $h(x) \geqslant 0$, 并且存在点 $c(a<c<b)$ 使得 $h(c)>0$. 所以, 如果在充分接近 c 点处取两点 s, t 使得 $a<s<c<t<b$, 那么在区间 $[s,t]$ 上, 恒有 $h(x)>0$. 因此根据 (4.41) 式、(4.43) 式和定理 4.1 的 (4),

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \int_a^s h(x)\mathrm{d}x + \int_s^t h(x)\mathrm{d}x + \int_t^b h(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_s^t h(x)\mathrm{d}x > 0.$$

从而根据 (4.42) 式,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

所以, (4.43) 式的等号成立, 仅当在 (a,b) 上 $f(x) = g(x)$ 成立.

结论 (4) 根据定理 4.1 的结论 (5) 即不等式 (4.6) 式显然成立.

至此, 在 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上连续的情况下, 我们证明了定理 4.6. 其次当 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 上除有限个点 $c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots, c_m, a<c_1<c_2<\cdots<c_k<\cdots<c_m<b$ 外连续的情况下, 如果设 $c_0 = a, c_{m+1} = b$, 那么根据广义积分的定义 (4.37) 式和上述 (4.41) 式,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} g(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x), g(x)$ 在各区间 (c_{k-1}, c_k) 上都连续, 所以定理 4.6 在每个区间 (c_{k-1}, c_k) 上都成立, 从而在区间 (a, b) 上也成立. □

推论　对于广义积分 $\int_a^{+\infty}, \int_{-\infty}^{b}, \int_{-\infty}^{+\infty}$, 上述的 (1), (2), (3) 和 (4) 也成立.

对于广义积分也约定 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, 并当 $a < b$ 时,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

则和 4.2 节 a) 一样, 等式 (4.41) 式的成立与 a, b, c 的大小无关. 更进一步, 若约定

$$\int_{+\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

等等, 则 (4.41) 式的 a, b, c 中的一个或两个换写成 $+\infty, -\infty$, 等式都成立.

定理 4.7　设 $f(x)$ 是在开区间 (a, b) 上的关于 x 的连续函数.

(1) 若广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并任取一点 c 使 $a < c < b$,

$$F(x) = \int_c^x f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可微, 并且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 设 $F(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 若 $F(x)$ 在开区间 (a, b) 上可微且 $F'(x) = f(x)$, 则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明　(1) 根据定理 4.4, 显然 $F(x)$ 在 (a, b) 上可微, 且 $F'(x) = f(x)$. 所以, 也只须验证 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续即可.

$$\lim_{x\to b-0} F(x) \lim_{x\to b-0} \int_c^x f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(b).$$

另外, 当 $a < x < c$ 时, 因为 $\int_c^x f(x)\mathrm{d}x = -\int_x^c f(x)\mathrm{d}x$, 所以

$$\lim_{x\to a+0} F(x) = -\lim_{x\to a+0} \int_x^c f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\mathrm{d}x = F(a).$$

因此, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

(2) 若 $a<s<t<b$, 则由微积分基本公式 (4.15) 式, $\int_s^t f(x)\mathrm{d}x = F(t)-F(s)$. 所以

$$\lim_{\substack{t\to b-0\\ s\to a+0}}\int_s^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-0}F(t)-\lim_{s\to a+0}F(s)=F(b)-F(a).$$

因此,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

□

在开区间 (a,b) 上定义的连续函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 同时存在时, 若令 $f(a)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$, $f(b)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$, 则 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 所以广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 成为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 因此

$$F(x)=\int_c^x f(x)\mathrm{d}x,\quad a<c<b$$

在闭区间 $[a,b]$ 上可微, 并且 $F'(x)=f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续. 即 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的光滑函数.

定理 4.8 设 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上除有限个点 $c_1,c_2,\cdots,c_m, a<c_1<c_2<\cdots<c_m<b$ 外连续的函数.

(1) 若广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x + C,\quad C\text{ 是常数},$$

$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 除 $a,c_1,c_2,\cdots,c_m,b$ 外都可微, 并且 $F'(x)=f(x)$.

(2) 设 $F(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 如果 $F(x)$ 除点 $a,c_1,c_2,\cdots,c_m,b$ 以外都可微, 并且 $F'(x)=f(x)$, 那么广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x)-F(a),\quad a\geqslant x\geqslant b. \tag{4.45}$$

证明 (1) 设 $c_0=a, c_{m+1}=b$. 当 $c_{k-1}\leqslant x\leqslant c_k$ 时, 若取定一点 c, 使得 $c_{k-1}<c<c_k$, 则由 (4.41) 式,

$$F(x)=\int_c^x f(x)\mathrm{d}x+\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + C.$$

因此, 根据上述定理 4.7 的 (1), $F(x)$ 在 $[c_{k-1},c_k]$ 上连续, 在 (c_{k-1},c_k) 上可微, 并且 $F'(x)=f(x)$. 由此可得, 在每个闭区间 $[c_{k-1},c_k]$, $k=1,2,\cdots,m+1$ 上连续的函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上显然也是连续的.

(2) 在 $c_k < x \leqslant c_{k+1}$ 的闭区间 $[c_{j-1}, c_j]$, $j = 1, 2, \cdots, k$ 及 $[c_k, x]$ 上, 对 $F(x)$ 应用定理 4.7 的 (2) 可得,

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)\mathrm{d}x = F(c_j) - F(c_{j-1}),\ \int_{c_k}^{x} f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(c_k).$$

又因为 $c_0 = a$, 所以

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{k}\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_k}^{x} f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a). \qquad \square$$

在区间 $(a, +\infty)$ 上, 函数 $f(x)$ 对于所有的 $t(t > a)$ 在区间 (a, t) 上, 除至多有限个点以外连续, 则当广义积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + C$ 是区间 $(a, +\infty)$ 上关于 x 的连续函数, 其中 C 是常数. 并且

$$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^t = F(t) - F(a),$$

所以, 如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ 存在, 那么广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}[F(x)]_a^t.$$

此式右边用符号 $[F(x)]_a^{+\infty}$ 来表示:

$$[F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}[F(t)]_a^t = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a). \tag{4.46}$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^{+\infty}.$$

符号 $[F(x)]_{-\infty}^{b}$ 以及 $[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}$ 所表达的含义也是一样的.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上除有限个点 $c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots, c_m$, $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_k < \cdots < c_m < b$ 外连续, 并且在每一点 c_k 处的左、右极限 $\lim\limits_{x\to c_k-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c_k+0} f(x)$ 同时存在时, 称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上**分段连续**(piecewise continuous). 此时, 若将 $[a, b]$ 分割成 $m+1$ 个子区间, $I_1 = [a, c_1]$, $I_2 = [c_1, c_2], \cdots, I_k = [c_{k-1}, c_k], \cdots, I_{m+1} = [c_m, b]$, 则

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + C, \quad C\text{是常数},$$

在各个子区间 I_k 上是光滑函数, 因此 $F(x)$ 在 3.3 节的意义下是区间 $[a,b]$ 上的分段光滑函数.

反之, 如果 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是分段光滑函数, 并且除点 $c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots,c_m,a<c_1<c_2<\cdots<c_k<\cdots<c_m<b$ 外都光滑, 那么当 $a\leqslant x\leqslant b$, $x\neq c_k$, $k=1,2,\cdots,m$ 时, $f(x)=F'(x)$; 当 $c=c_k$ 时, 如令 $f(c_k)=\mathrm{D}^+F(c_k)$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上分段连续. 此时函数 $F(x)$ 在每个闭区间 $I_k=[c_{k-1},c_k]$ 上是光滑的, 即 $F(x)$ 在 I_k 上的限制 $F_{I_k}(x)$ 是光滑函数, 但 $f(x)$ 未必在 I_k 上连续. 一般地,

$$f_{I_k}(c_k)=\mathrm{D}^+F(c_k)\neq\mathrm{D}^-F(c_k)=\lim_{x\to c_k-0}F'(x)=\lim_{x\to c_k-0}f_{I_k}(x)$$

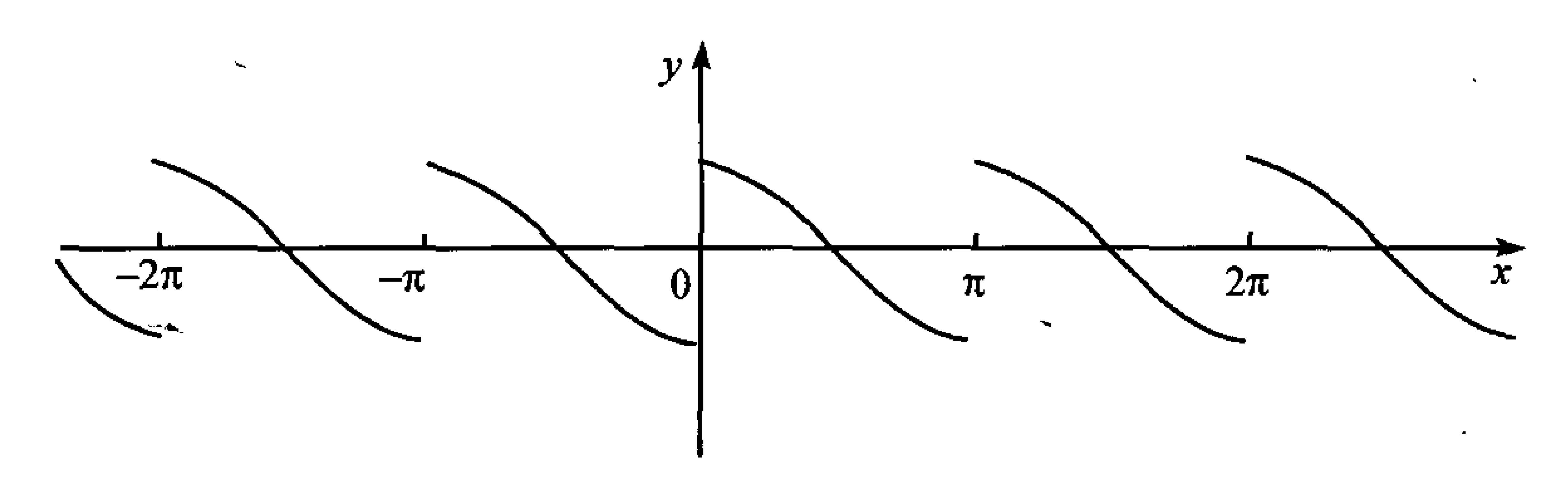
定义在如 $[a,+\infty)$ 这样的无限区间上的函数 $f(x)$, 对于任意实数 $t,t>a$, 在 $[a,t]$ 上分段连续时, 称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是分段连续的. 例如, $f(x)$ 定义为:

当 $m\pi\leqslant x\leqslant(m+1)\pi$ 时, $f(x)=(-1)^m\cos x$, m 是整数,

那么, $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段连续函数, 并且

$$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$$

是分段光滑函数, 即 $F(x)=|\sin x|$.



c) 收敛条件

当 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续时, 若 $F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x, a<t<b$, 则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛意味着当 $t\to b-0$ 时, 函数 $F(t)$ 收敛. 根据 Cauchy 判别法, (2.1 节定理 2.1) 当 $t\to b-0$ 时, $F(t)$ 收敛的充分必要条件是对于任意的正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要}b-\delta(\varepsilon)<s<t<b,\ \text{就有}|F(t)-F(s)|<\varepsilon$$

成立. 因为 $F(t)-F(s)=\int_s^t f(x)\mathrm{d}x$, 所以广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是对于任意的正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要}b-\delta(\varepsilon)<s<t<b,\text{就有}\left|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{4.47}$$

成立. 这是判断广义积分收敛的**Cauchy 判别法**. 不言而喻, 当 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 或 (a,b) 上连续时, 广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 判别法同样成立.

根据 Cauchy 判别法, 在区间 (a,b) 上连续且有界的函数 $f(x)$ 的广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 总是收敛的. 这是因为根据假设, 当 $a<x<b$ 时, 存在 $|f(x)|\leqslant C$ 的常数 C, 所以根据定理 4.1 的 (4) 和 (5), 若 $b-\delta<s<t<b$, 则

$$\left|\int_s^t f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_s^t|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_s^t C\mathrm{d}x=C(t-s)<C\cdot\delta.$$

在区间 $[a,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$ 的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是, 对于任意的正实数 ε, 存在实数 $\nu(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要}\nu(\varepsilon)<s<t,\text{就有}\left|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{4.48}$$

成立. 此 Cauchy 判别法仍适用于当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上不连续, 但对应所有的 $t, t>a$, 在 $[a,t]$ 上除有限个点外连续, 且广义积分 $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时的情况. 同理, 关于广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛的判定, Cauchy 判别法也同样成立.

定理 4.9 (1) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续. 若广义积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 若广义积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

证明 设 $a<s<t<b$, 则根据 (4.6) 式,

$$\left|\int_s^t f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_s^t|f(x)|\mathrm{d}x. \tag{4.49}$$

因此, 根据上述的 Cauchy 判别法可知: (1) 若 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛; (2) 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛. □

此证明的核心是不等式 (4.49) 式, 因此对于 $f(x)$ 具有若干个不连续点的一般情况, 定理 4.9 仍然成立.

定理 4.10 (1) 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上除至多有限个点外连续. 若广义积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 设 $f(x)$ 对应所有的 $t, t>a$, 在 (a,t) 上除至多有限个点外连续, 若广义积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

对于广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 相应的结论也仍然成立.

当广义积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时, 称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$**绝对收敛**. 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的绝对收敛的含义也是一样的. 收敛的广义积分未必是绝对收敛的, 这与收敛的无穷级数未必绝对收敛的现象类似.

例 4.7 根据 (3.23) 式, $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)=1$, 所以当 $x=0$ 时, 定义 $\sin x/x$ 的值为 1, 则 $\sin x/x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数. 现考察这个函数的广义积分 $\int_0^{+\infty}(\sin x/x)\mathrm{d}x$. 设 $0<s<t$, 则由分部积分公式 (4.22) 式,

$$\int_s^t \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_s^t-\int_s^t \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x,$$

又因为

$$\int_s^t \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_s^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_s^t=\frac{1}{s}-\frac{1}{t},$$

所以,

$$\left|\int_s^t \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{t}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}-\frac{1}{t}=\frac{2}{s}.$$

因此根据 Cauchy 判别法, 广义积分 $\int_0^{+\infty}(\sin x/x)\mathrm{d}x$ 收敛. 但是 $\int_0^{+\infty}(\sin x/x)\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的.

[证明] 对自然数 n, $n\geqslant 2$,

$$\int_{n\pi-\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n\pi}\int_{n\pi-\pi}^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x,$$

因为在区间 $(n\pi-\pi,n\pi)$ 上 $\sin x$ 的符号是一定的, 所以

$$\int_{n\pi-\pi}^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\left|\int_{n\pi-\pi}^{n\pi}\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos(n\pi-\pi)-\cos(n\pi)|=2.$$

所以,

$$\int_{\pi}^{m\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{m}\int_{n\pi-\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

因此由 1.5 节的例 1.4 得,

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\pi}^{m\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=+\infty.$$

即广义积分 $\int_0^{+\infty}|\sin x/x|\mathrm{d}x$ 是发散的. □

一般地, 若 $F(t)$ 是定义在区间 $[a,b)$ 上的关于 t 的单调非减函数, 则或者 $\lim\limits_{t\to b-0}F(t)=\alpha$, α 为实数, 或者 $\lim\limits_{t\to b-0}F(t)=+\infty$.

[证明] 取 $I=[a,b)$, 考察函数 $F(t)$ 的值域 $F(I)=\{F(t)|a\leqslant t<b\}$. 当 $F(I)$ 有上界时, 设 $F(I)$ 的上确界为 α, 则对于任意正实数 ε, 存在满足 $\alpha-\varepsilon<F(\tau)$ 的 $\tau, a<\tau<b$. 因为 $F(t)$ 单调非减, 所以若 $\tau<t<b$, 则 $\alpha-\varepsilon<F(t)\leqslant\alpha$. 因此 $\lim\limits_{t\to b-0}F(t)=\alpha$. 当 $F(I)$ 没有上界时, 对于任意实数 μ, 存在满足 $F(\tau)>\mu$ 的 $\tau, a<\tau<b$, 使得当 $\tau<t<b$ 时, $F(t)>\mu$. 因此 $\lim\limits_{t\to b-0}F(t)=+\infty$. □

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b)$ 上的连续函数, 并且 $F(t)=\int_a^t|f(x)|\mathrm{d}x$. 则当 $a\leqslant s<t<b$ 时,

$$F(t)-F(s)=\int_s^t|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

即 $F(t)$ 是区间 $[a,b)$ 上关于 t 的单调非减函数. 因此, 根据上述结果, 或者 $\lim\limits_{t\to b-0}F(t)=\alpha$, α 为实数, 或者 $\lim\limits_{t\to b-0}F(t)=+\infty$, 必有一个成立. 因此当广义积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 不收敛时,

$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t|f(x)|\mathrm{d}x=+\infty.$$

此时, 也称广义积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 向 $+\infty$ 方向发散, 记为

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=+\infty.$$

不等式 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$ 蕴涵着广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

上述结果在一般情况下也成立. 即当 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上除至多有限个点外连续时, 广义积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 要么收敛, 要么发散于 $+\infty$, 并且 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$ 蕴涵着广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的. 对于广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也有相应的结论.

和级数的情况一样，为了证明函数 $f(x)$ 的广义积分是绝对收敛的，我们经常采用把 $|f(x)|$ 与广义积分收敛的标准函数 $r(x), r(x) \geqslant 0$ 相比较的方法.

定理 4.11 (1) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b)$ 上的连续函数，并且对某个指数 α, $0<\alpha<1$, 若满足不等式

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{(b-x)^{\alpha}}, \quad C\text{是常数},$$

则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，并且对某个指数 α, $\alpha>1$, 若满足不等式

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^{\alpha}}, \quad C\text{是常数},$$

则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

证明 (1) 当 $0<\alpha<1$ 时，$(b-x)^{1-\alpha}/(\alpha-1)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,b)$ 上可微，其导函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$$

在 $[a,b)$ 上连续. 所以根据定理 4.7 的 (2),

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x = \left[\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

因此

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \frac{C}{(b-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x = C\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < +\infty.$$

(2) 的证明相同. 即当 $\alpha>1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{C}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x = \left[\frac{C}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_a^{+\infty} = \frac{C}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} < +\infty. \quad \square$$

对 (2) 的证明中采用了 (4.46) 式的符号 $[\ ]_a^{+\infty}$.

例 4.8 关于 x 的函数 $\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续，并且恒有 $\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}>0$, 当 $s>0$ 时，广义积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x \tag{4.50}$$

是收敛的.

[证明] 根据 (2.6) 式，$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s+1}=0$. 所以若 $x \geqslant c$, 则存在满足 $\mathrm{e}^{-x}x^{s+1} \leqslant 1$ 的正实数 c. 若给定了这样的一个 c, 则当 $x \geqslant c$ 时,

$$|\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}| = \frac{\mathrm{e}^{-x}x^{s+1}}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

因此根据定理 4.11 的 (2), 广义积分 $\int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $0 < x \leqslant c$ 时, 在 $0 < s < 1$ 的情况下,

$$|\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}| = \mathrm{e}^{-x}x^{s-1} < \frac{1}{x^{1-s}},$$

所以根据定理 4.11 的 (1) 得, 广义积分 $\int_0^c \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 收敛. 而在 $s \geqslant 1$ 的情况下,

$$|\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}| \leqslant x^{s-1} \leqslant c^{s-1},$$

所以, 显然 $\int_0^c \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 是收敛的. 故广义积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x = \int_0^c \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$$

收敛. □

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的关于 s 的函数, 这样的函数叫做 **Γ 函数**(gamma function). 若 $0 < \varepsilon < t$, 则根据分部积分公式 (4.22) 得

$$\int_s^t \mathrm{e}^{-x}x^s\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}x^s]_s^t + \int_s^t \mathrm{e}^{-x}sx^{s-1}\mathrm{d}x,$$

取 $s > 0, \varepsilon \to +0, t \to +\infty$ 时的极限为

$$\lim_{\substack{t\to+\infty \\ s\to+0}} [\mathrm{e}^{-x}x^s]_s^t = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^s - \lim_{\varepsilon\to+0} \mathrm{e}^{-\varepsilon}\varepsilon^s = 0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^s\mathrm{d}x = s\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x,$$

即

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s > 0. \tag{4.51}$$

当自然数 n 给定时, 重复利用 (4.51) 式得

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = n!\Gamma(1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 1,$$

所以

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{4.52}$$

d) 中值定理

积分法中的中值定理 (定理 4.2) 对于广义积分同样成立.

定理 4.12 (中值定理) 若关于 x 的函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 并且广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在点 ξ 满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi), \quad a<\xi<b. \tag{4.53}$$

证明 取定一点 $c, a<c<b$, 使得

$$F(x)=\int_c^x f(x)\mathrm{d}x,$$

则根据定理 4.7 的 (1), 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且在 (a,b) 上可微. 所以根据微分法的中值定理 (3.3 节定理 3.5), 存在点 ξ 满足

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi), \quad a<\xi<b. \tag{4.54}$$

又由于 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $F'(\xi)=f(\xi)$, 所以 (4.54) 式就是 (4.53) 式. □

由此证明可知, 积分法的中值定理和微分法的中值定理在本质上是同一个定理.

如果不用微分法的中值定理来证明定理 4.12, 则证明如下: 设

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

并且对所有的 $\xi, a<\xi<b$, 假设 $f(\xi)\neq\mu$, 则由中值定理 (2.2 节定理 2.2), 在开区间 (a,b) 上, 恒有 $f(x)>\mu$ 或恒有 $f(x)<\mu$. 因此根据定理 4.6 的 (3),

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b \mu\mathrm{d}x=\mu(b-a) \text{ 或 } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\mu(b-a),$$

这与 μ 的定义矛盾. 因此存在满足 $f(\xi)=\mu(a<\xi<b)$ 的点 ξ.

扩张的中值定理: 定理 4.3 也对广义积分成立.

定理 4.13 设 $f(x), g(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 当 $g(x)>0$ 时, 若广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, 则存在点 ξ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad a<\xi<b. \tag{4.55}$$

证明 取定点 $c, a<c<b$, 令

$$F(x)=\int_a^x f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ G(x)=\int_a^x g(x)\mathrm{d}x,$$

则 $F(x), G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 在 (a,b) 上 $G'(x)=g(x)>0$, 并且 $G(b)-G(a)=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$. 因此根据 3.3 节的定理 3.9, 存在点 ξ 满足

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \quad a<\xi<b,$$

又因为 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, $F'(\xi)/G'(\varepsilon)=f(\xi)$. 所以, 关于 ξ(4.55) 式成立. □

4.4 积分变量的变换

设 $f(x)$ 是区间 I 上关于 x 的连续函数, $\varphi(t)$ 是定义在区间 J 上的关于 t 的连续可微函数, φ 的值域 $\varphi(J)\subset I$, 现考察 f 和 φ 的复合函数 $f(\varphi(t))$. 根据假设 $\varphi(t)$ 的导函数 $\varphi'(t)$ 是关于 t 的连续函数.

定理 4.14 设 $\alpha,\beta,\alpha\neq\beta$ 是 J 内 2 点. 若 $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{4.56}$$

证明 设

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

则 $F(x)$ 是 I 上关于 x 的可微函数, 并且 $F'(x)=f(x)$. 所以由复合函数的微分法, $F(\varphi(t))$ 关于 t 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t))=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t). \tag{4.57}$$

所以

$$F(b)-F(a)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$ □

将 (4.56) 式左边的定积分用右边的形式表达时, 叫做积分变量 x**变换**为变量 t. 另外有时也将函数 φ 称为**变换**. 因为 $\mathrm{d}\varphi(t)=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, 所以 (4.56) 式右边可将左边的 x,a,b 分别用 $\varphi(t),\varphi(\alpha),\varphi(\beta)$ 替换得到. 因此 (4.56) 式被称为**换元积分公式**. (4.57) 式也可用

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{4.58}$$

来表示.

通常, 当 $\varphi'(t)>0, I=\varphi(J)$ 时, 根据 3.3 节定理 3.6, $x=\varphi(t)$ 是关于 t 的单调递增函数, 根据 3.4 节定理 3.18 的 (3), 反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 也是关于 x 的连续可微的单调递增函数, 并且根据对应 $x=\varphi(t)$, I 上每一点 x 与 J 上每一点 t 是一一对应的. 因此, 此时 t 可以看作是 $x=\varphi(t)$ 的新坐标, φ^{-1} 看作是将坐标 x 变换成新坐标 t 的**坐标变换**.

例 4.9 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

[证明] $x=\tan t$ 是在区间 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上关于 t 的连续可微的单调递增函数, 并且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+x^2.$$

因此, 根据公式 (4.56),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t.$$

又因为 $1+\tan t=(\cos t+\sin t)/\cos t$, 所以根据加法定理,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t),$$

所以

$$\ln(1+\tan t)=\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}=\ln\sqrt{2}+\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-\ln\cos t.$$

设 $t=\pi/4-s$, 因为 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s=-1$, 所以根据 (4.56) 式,

$$\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t=-\int_{\pi/4}^{0}\ln\cos s\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/4}\ln\cos s\mathrm{d}s.$$

因此

$$\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$ □

换元积分公式 (4.56) 对广义积分也成立.

定理 4.15 设 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上关于 x 的连续函数, $\varphi(t)$ 是 (α,β) 上关于 t 的连续可微函数. 当 $\alpha<t<\beta$ 时, 假设 $a<\varphi(t)<b$, $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$, $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$. 则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 广义积分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 收敛, 并且等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{4.59}$$

成立.

证明 设 $\alpha<\rho<\sigma<\beta$, $r=\varphi(\rho)$, $s=\varphi(\sigma)$, 则根据定理 4.14,

$$\int_r^s f(x)\mathrm{d}x=\int_\rho^\sigma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

根据假设, 当 $\rho\to\alpha+0$ 时, $r\to a+0$; 当 $\sigma\to\beta-0$ 时, $s\to b-0$. 所以若广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{s\to b-0\\ r\to a+0}}\int_r^s f(x)\mathrm{d}x$$

收敛, 则

$$\lim_{\substack{\sigma\to\beta-0\\ \rho\to\alpha+0}}\int_\rho^\sigma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\lim_{\substack{s\to b-0\\ r\to a+0}}\int_r^s f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即广义积分 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ 也收敛, 并且等式 (4.59) 成立.

反之, 若广义积分

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\lim_{\substack{\sigma\to\beta-0\\ \rho\to\alpha+0}}\int_\rho^\sigma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

收敛, 则广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{s\to b-0\\ r\to a+0}}\int_r^s f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛. 为证明极限 $\lim\limits_{\substack{s\to b-0\\ r\to a+0}}\int_r^s f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 如在 2.1 节所述, 对于满足 $a<r_n<s_n<b$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=b$ 的所有数列 $\{r_n\},\{s_n\}$, 只须证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{r_n}^{s_n}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛即可. 根据假设 $\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$. 所以由中值定理, 对每一个 r_n,s_n, 存在满足 $r_n=\varphi(\rho_n)$, $s_n=\varphi(\sigma_n)$ 的 $\rho_n,\sigma_n,\alpha<\rho_n<\beta,\alpha<\sigma_n<\beta$. 为了验证数列 $\{\rho_n\}$ 收敛于 α, 我们假设 $\{\rho_n\}$ 不收敛于 α, 则对某个正实数 ε, 存在无数个满足 $\alpha+\varepsilon\leqslant\rho_n<\beta$ 的项 ρ_n. 根据 1.6 节的定理 1.30, 由这无数个项 ρ_n 组成的 $\{\rho_n\}$ 的子列包含收敛的子列 $\rho_{n_1},\rho_{n_2},\cdots,\rho_{n_m},\cdots$. 设该极限为 $\omega=\lim\limits_{m\to\infty}\rho_{n_m}$, 则 $\alpha+\varepsilon\leqslant\rho_{n_m}<\beta$, 所以 $\alpha+\varepsilon\leqslant\omega\leqslant\beta$. 若 $\omega=\beta$, 则

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\rho_{n_m})=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b>a,$$

若 $\omega<\beta$, 则

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\rho_{n_m})=\varphi(\omega)>a,$$

不论哪种情况, 都与

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\rho_{n_m})=\lim_{m\to\infty}r_{n_m}=\lim_{n\to\infty}r_n=a$$

相矛盾. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\alpha$, 同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\beta$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{r_n}^{s_n}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n}^{\sigma_n}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

即广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且等式 (4.59) 成立. □

在定理 4.15 中, 若用 $b=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$ 和 $a=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$ 分别代替 $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$ 和 $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$, 则只是等式 (4.59) 式变为

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t, \tag{4.60}$$

其他的都不变, 定理仍然成立. 定理 4.15 中 a,b,α,β 中的任意几个换写成 $+\infty$ 或 $-\infty$, 定理 4.15 仍然成立. 证明过程按换写的方式加以整理即可. 例如, 将 β 换成 $+\infty$ 时, 证明中与定理 4.15 中 " 假设 $\{\rho_n\}$ 不收敛于 α, 则对于任意正实数 ε, 存在无数个满足 $\alpha+\varepsilon\leqslant\rho_n<+\infty$ 的项 ρ_n" 以上的部分证明相同. 由这无数个项 ρ_n 组成的 $\{\rho_n\}$ 的子列如果没有界, 则它包含发散于 $+\infty$ 的子列 $\rho_{n_1},\rho_{n_2},\cdots,\rho_{n_m},\cdots$; 如果有界, 则它包含收敛于某个 $\omega,\alpha+\varepsilon\leqslant\omega<+\infty$ 的子列 $\rho_{n_1},\rho_{n_2},\cdots,\rho_{n_m},\cdots$. 所以, 或者

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\rho_{n_m})=\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=b>a,$$

或者

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\rho_{n_m})=\varphi(\omega)>a,$$

这都与

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\rho_{n_m})=\lim_{m\to\infty}r_{n_m}=a$$

相矛盾. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=a$. 同理, 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty$ 不成立, 则因为 $\alpha\leqslant\sigma_n$, 所以数列 $\{\sigma_n\}$ 包含收敛于某个 ω, $\alpha\leqslant\omega<+\infty$ 的子列 $\sigma_{n_1},\sigma_{n_2},\cdots,\sigma_{n_m},\cdots$, 并且 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(\sigma_{n_m})$ 等于 a 或 $\varphi(\omega)$, $\alpha<\omega<+\infty$. 这与

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(\sigma_{n_m})=\lim_{m\to\infty}S_{n_m}=b$$

相矛盾. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{r_n}^{s_n}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\rho_n}^{\sigma_n}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^{+\infty}f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$ □

$x=-t$ 是积分变量变换的最简单的例子. 将这样的变换代入公式 (4.60) 中, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-a}^{-b} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-b}^{-a} f(-t)\mathrm{d}t.$$

右边积分的积分变量 t 用 x 替换, 可得公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-b}^{-a} f(-x)\mathrm{d}x. \tag{4.61}$$

此公式中若把 (a,b) 换成 $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 时, 结果仍然成立. $f(x)$ 的定义域在变换 $x\to -x$ 下定义域不变, 并且满足恒等式 $f(-x)=f(x)$ 时, 称 $f(x)$ 是关于 x 的**偶函数**(even function); 满足恒等式 $f(-x)=-f(x)$ 时, 称 $f(x)$ 是关于 x 的**奇函数**(odd function). 例如, $\cos x$ 是关于 x 的偶函数, $\sin x$ 是关于 x 的奇函数. 根据 (4.61) 式, 若 $f(x)$ 是关于 x 的偶函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x,$$

若 $f(x)$ 是关于 x 的奇函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x.$$

这若用 $f(x)$ 的图表描绘出来就一目了然了.

例 4.10 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

[证明] 在区间 $(0,\pi/2]$ 上 $\ln\sin x$ 连续, 并且 $\lim\limits_{x\to+0}\ln\sin x=-\infty$. 广义积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛, 事实上, 因为

$$\ln\sin x=\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\ln x,$$

并且根据 (3.23) 式得, $\lim\limits_{x\to+0}\ln(\sin x/x)=0$, 根据 (4.23) 式得, $\displaystyle\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x$, 根据 2.3 节的例 2.9 得, $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=-\lim\limits_{x\to+0}x\ln(1/x)=0$, 令

$$S=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

进行积分变量变换 $x=\pi-t$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 所以

$$S=-\int_{\pi}^{\pi/2}\ln\sin(\pi-t)\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

因此,

$$2S = \int_0^{\pi} \ln \sin x \mathrm{d}x.$$

在此若进行变量变换 $x = 2t$, 则 $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$, 并且

$$\ln \sin(2t) = \ln(2 \sin t \cdot \cos t) = \ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t,$$

所以,

$$S = \int_0^{\pi/2} \ln \sin(2t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln \sin t \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln \cos t \mathrm{d}t,$$

令 $t = \pi/2 - u$, 则

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos t \mathrm{d}t = -\int_{\pi/2}^{0} \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \mathrm{d}u.$$

因此

$$S = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2S,$$

所以

$$S = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$ □

例 4.11 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$

[证明] 因为 e^{-x^2} 是关于 x 的偶函数, 根据 (4.61) 式得

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

所以只须证明

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

即可. 又根据 Taylor 公式 (3.39) 式得

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{\theta x} x^2, \quad 0 < \theta < 1,$$

所以, 当 $x \neq 0$ 时, $\mathrm{e}^x > 1 + x$. 将 x 换成 x^2 或 $-x^2$ 可得, $\mathrm{e}^{x^2} > 1 + x^2$, $\mathrm{e}^{-x^2} > 1 - x^2$, 即

$$1 - x^2 < \mathrm{e}^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2}.$$

所以, 对于任意的自然数 n, 有

$$(1-x^2)^n < \mathrm{e}^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

所以

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x < \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x. \tag{4.62}$$

这里广义积分的收敛可以通过 4.3 节的例 4.6 得出的

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

来推得. 为了求解 (4.62) 式左边和右边的积分值, 考察 4.2 节的例 4.4 中出现的定积分 $S_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \mathrm{d}x$. 首先将 $x = \cot t = 1/\tan t$ 中的积分变量 x 替换成 t. $\cot t$ 是区间 $(0, \pi/2]$ 上关于 t 的连续可微函数, 因为 $0 \leqslant \cot t < +\infty$, $\lim_{t\to+0} \cot t = +\infty$, $\cot(\pi/2) = 0$, $\mathrm{d}(\cot t)/\mathrm{d}t = -1/\sin^2 t$. 又由于 $1+x^2 = 1/\sin^2 t$, 所以根据定理 4.15,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = -\int_{\pi/2}^0 (\sin t)^{2n-2}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n-2}\mathrm{d}t = S_{2n-2}.$$

同理, 若 $x = \cos t, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, $\mathrm{d}(\cos t)/\mathrm{d}t = -\sin t, 1 - x^2 = \sin^2 t$, 则

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n+1}\mathrm{d}t = S_{2n+1}.$$

另一方面, 根据变量变换 $x = t/\sqrt{n}$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

根据 (4.62) 式可得

$$\sqrt{n} S_{2n+1} < \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x < \sqrt{n} S_{2n-2}.$$

根据 (4.27) 式和 (4.28) 式得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

对 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ 进行变量变换 $x = t/\sqrt{2}$, 则可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x = 1.$$

$\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ 是高中数学中所学的标准正态分布的概率密度.

习　题

31. 将下面的不定积分用初等函数表示 (试用变量变换 $t=\mathrm{e}^x$, $t=\sin x$, $t=\tan x, t=\tan\dfrac{x}{2}$ 等):

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$, (ii) $\displaystyle\int \cos^3 x\mathrm{d}x$, (iii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$, $a>0, b>0$

(iv) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, (v) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + a}$, $a>1$.

32. 将下面的不定积分用初等函数表示 (试用分部积分法):

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$, (ii) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{px}\cos(qx)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \mathrm{e}^{px}\sin(qx)\mathrm{d}x$, p, q 是常数,

(iii) $\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, n 是自然数, (iv) $\displaystyle\int \cos^4 x\mathrm{d}x$.

33. 求下列定积分的值:

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x\mathrm{d}x$, $\alpha>-1$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$, $a>0, b>0$,

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + a}$, $a>1$, (iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(ax)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $a>0$.

34. 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的值 (三村征雄《微分積分学》[①], p. 149).

35. 关于习题 26 中 Hermite 多项式 $H_n(x)$, 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m<n \\ n!\sqrt{\pi}, & m=n \end{cases}$$

成立.

36. 试证对于在区间 $[a,b]$ 上连续的任意函数 $f(x), g(x)$, **Schwarz 不等式**

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x$$

① 三村征雄编《大学演習微分積分学》, 裳華房.

成立.

37. 设函数 $\varphi(y)$ 在区间 I 上关于 y 是 2 阶连续可微的, 并且 $\varphi''(y) > 0$. 证明：当定义在区间 $[a,b]$ 内的连续函数 $f(x)$ 的值域包含在 I 内时, 不等式

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}x$$

成立 (参考习题 29).

第5章　无穷级数

5.1　绝对收敛与条件收敛

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 通过变换其项的顺序得到新的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$. 例如

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$

是由交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$$

变换其项的顺序得到的级数. 如果新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 的第 n 项 a'_n 是原来级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 $\gamma(n)$ 项, 则新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 可写作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)}$. 若用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合, 则 $\gamma: n \to m = \gamma(n)$ 是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一一对应. 例如将对应 γ 定义为 $\gamma(1)=1$, 并且对于任意的自然数 k, 定义为 $\gamma(3k)=2k, \gamma(3k-1)=4k-1, \gamma(3k+1)=4k+1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)} = a_1+a_3+a_2+a_5+a_7+a_4+a_9+a_{11}+a_6+\cdots.$$

在本节中, 将假定 γ 是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一一对应. 并且将由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 变换其项的顺序得到的级数记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)}$.

将绝对收敛的级数和条件收敛的级数的项的顺序变换, 得到的新级数与原级数具有完全不同的性质.

定理 5.1　(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则即使变换级数项的顺序, 其和 $s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不变.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则对于任意给定的实数 ξ, 能够变换 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 项的顺序, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)}=\xi$; 且可以通过变更项的顺序, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)}$ 发散于 $+\infty$ 或 $-\infty$.

证明 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$. 我们先来考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 或者收敛或者发散于 $+\infty$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ 意味着级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. 用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)}$ 表示变换级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项的顺序得到的级数. 对于自然数 m, 若取自然数 $\gamma(1), \gamma(2), \cdots, \gamma(m)$ 中最大的一个, 并且设其为 l, 则

$$\sum_{n=1}^{m} |a_{r(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{l} |a_n|.$$

所以, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, 那么

$$\sum_{n=1}^{m} |a_{r(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{r(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ 时, 此不等式显然成立. 若把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{r(n)}$ 替换一下来考虑, 则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_{r(n)}|,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{r(n)}|. \tag{5.1}$$

即, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则变换其项的顺序后得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{r(n)}|$ 也收敛, 并且等式 (5.1) 成立. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{r(n)}|$ 也发散.

从这个结果知, 对于收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$, 当负项 a_n 至多有有限个时, 即使改变项的顺序, 其和 $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也不变. 事实上, 除了那些至多有限个负的项, 都有

$a_n = |a_n|$. 所以这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 当级数只有有限个正项时, 若考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$, 则它又可归结为只有有限个负项的情况.

于是, 下面我们只须考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$ 是含有正项和负项都有无数个的情况. 若从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中只取出正项, 按相同的顺序排列得到的级数设为 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$; 只取出负项, 按相同的顺序排列得到的级数设为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-q_n)$. 并且在部分和 $\sum_{n=1}^{m} a_n$ 中出现在正项的个数设为 $\lambda(m)$, 负项的个数设为 $\nu(m)$, 则

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{\lambda(m)} p_n - \sum_{n=1}^{\nu(m)} q_n, \quad \lambda(m) + \nu(m) = m, \tag{5.2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n| = \sum_{n=1}^{\lambda(m)} p_n + \sum_{n=1}^{\nu(m)} q_n, \quad p_n > 0, \ q_n > 0. \tag{5.3}$$

当 $m \to \infty$ 时, $\lambda(m) \to +\infty$, $\nu(m) \to +\infty$.

(1) 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则根据 (5.3) 式, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛. 所以根据 (5.2) 式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n. \tag{5.4}$$

如上述, 即使改变级数项的顺序, 和 $P = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $Q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都不变. 从而即使改变项的顺序, 和 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也不变.

(2) 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 收敛的话, 则根据 (5.2) 式, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 也收敛, 所以根据 (5.3) 式, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, 这与假设矛盾. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 发散. 同理, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 也发散. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$. 所以, 若令

$$P_m = \sum_{n=1}^{m} p_n, \quad Q_m = \sum_{n=1}^{m} q_n,$$

则数列列 $\{P_m\}$ 和 $\{Q_m\}$ 同时单调递增. 并且当 $m\to\infty$ 时, $P_m\to+\infty$, $Q_m\to+\infty$. 因此, 当实数 ξ 给定时, 对于每一个自然数 m, 可确定满足下式

$$P_{k(m)-1}<\xi+Q_m\leqslant P_{k(m)} \tag{5.5}$$

的自然数 $k(m)$. 但是, 当 $\xi+Q_m\leqslant p_1$ 时, 令 $k(m)$=1 并且把 (5.5) 式用下式 $\xi+Q_m\leqslant P_1, P_1=p_1$ 来替换. 显然

$$k(m-1)\leqslant k(m),\quad m\to\infty\text{ 时}\quad k(m)\to+\infty,$$

根据 (5.5) 式,

$$P_{k(m)}-Q_m-p_{k(m)}<\xi\leqslant P_{k(m)}-Q_m, \tag{5.6}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 所以当 $n\to\infty$ 时, $a_n\to0$. 因此, 当 $m\to\infty$ 时, $p_{k(m)}\to0$. 所以

$$\xi=\lim_{m\to\infty}(P_{k(m)}-Q_m). \tag{5.7}$$

于是, 令

$$\begin{aligned}&\Delta_1=P_{k(1)}-Q_1,\\&\Delta_m=P_{k(m)}-Q_m(P_{k(m-1)}-Q_{m-1}),\quad m=2,3,4,5,\cdots,\end{aligned}$$

因为

$$P_{k(m)}-Q_m=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_m,$$

所以, 根据 (5.7) 式,

$$\xi=\sum_{m=1}^{\infty}\Delta_m=\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_m+\cdots. \tag{5.8}$$

若 $k(m-1)<k(m)$, 则

$$\Delta_m=p_{k(m-1)+1}+p_{k(m-1)+2}+\cdots+p_{k(m)}-q_m,$$

若 $k(m-1)=k(m)$, 则

$$\Delta_m=-q_m,$$

并且 (5.8) 式的右边写成

$$a_{r(1)}+a_{r(2)}+a_{r(3)}+\cdots+a_{r(n)}+\cdots.$$

这样得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)}$ 是由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 变换其项的顺序之后得到的, 其部分和或者为

$$\sum_{n=1}^{l} a_{r(n)} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m + p_{k(m)+1} + \cdots + p_{k(m)+j}, \quad k(m) + j \leqslant k(m+1),$$

或者为

$$\sum_{n=1}^{l} a_{r(n)} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m.$$

根据 (5.8) 式, 当 $m \to \infty$ 时, $\Delta_m \to 0$, 所以,

$$p_{k(m)+1} + \cdots + p_{k(m+1)} = P_{k(m+1)} - P_{k(m)} = \Delta_{m+1} + q_{m+1} \to 0 (m \to \infty).$$

因此根据 (5.8) 式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)} = \xi.$$

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, 为了说明改变它的项的顺序就能够使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)}$ 发散于 $+\infty$, 在上述证明中, 把不等式 (5.5) 式替换为

$$P_{k(m)-1} < m + Q_m \leqslant P_{k(m)}$$

即可. 进一步, 要使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)}$ 发散于 $-\infty$, 只须改变原级数的项的顺序, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_{\gamma(n)})$ 发散于 $+\infty$ 即可. □

为求绝对收敛级数的和 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 根据 (5.4) 式, 只须分别求出正项和 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与负项和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-q_n)$, 然后相加即可, 即 $s = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. 这表明和 s 是无数个实数 a_n 的"总和". 对条件收敛的级数的和 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果改变级数的项的顺序, 那么其和就会改变. 所以不能认为此和是 a_n 的总和.

关于绝对收敛的两个级数的和的积, 分配律成立. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛时, 若令 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 则有

$$s \cdot t = a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_4b_1 + a_3b_2 + \cdots, \tag{5.9}$$

并且右边的级数绝对收敛.

[证明] 令 $\sigma_m = \sum\limits_{n=1}^{m} |a_n|$, $\tau_m = \sum\limits_{n=1}^{m} |b_n|$, $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\tau = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$, 再令

$$\rho_n = |a_n||b_1| + |a_{n-1}||b_2| + |a_{n-2}||b_3| + \cdots + |a_1||b_n|.$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{m} \rho_n$ 是 (5.9) 式右边级数的前 $m(m+1)/2$ 项的绝对值的和, 并且

$$\sum_{n=1}^{m} \rho_n \leqslant \sigma_m\tau_m \leqslant \sigma\tau.$$

所以 (5.9) 式右边的级数绝对收敛. 进而, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n \leqslant \sigma\tau$. 因为

$$\sigma_m\tau_m \leqslant \sum_{n=1}^{2m-1} \rho_n,$$

所以

$$\sigma\tau = \lim_{m\to\infty} \sigma_m\tau_m = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n.$$

因此

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sigma_m\tau_m - \sum_{n=1}^{m} \rho_n\right) = 0,$$

若令 $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$, $t_m = \sum\limits_{n=1}^{m} b_n$, 则

$$\left|s_mt_m - \sum_{n=1}^{m}(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n)\right| \leqslant \sigma_m\tau_m - \sum_{n=1}^{m} \rho_n.$$

所以

$$st = \lim_{m\to\infty} s_mt_m = \sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n).$$

即 (5.9) 式成立. □

关于条件收敛级数, 分配律 (5.9) 式未必成立. 例如, 若 $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$, 根据 1.5 节的定理 1.23, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 因为 $(n-k+1)k \leqslant (n+1)^2/4$, 所以

$$|a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k}} \geqslant \frac{2n}{n+1} \geqslant 1,$$

并且 (5.9) 式右边的级数不收敛.

上述关于级数的绝对收敛的结果, 对复数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n, w_n = a_n + \mathrm{i} b_n$ (a_n, b_n 为实数) 也成立. 即, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$, 则即使改变项的顺序, 其和 $s = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也不变. 事实上, 因为此时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时绝对收敛, 并且 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 此外分配律 (5.9) 式成立.

5.2 收敛的判别法

a) 标准级数

我们在 1.5 节 d) 中已经阐述过: 要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 往往采用它与标准级数相比较的方法. 当级数的每一个项 a_n 都是正实数时, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**正项级数**. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \neq 0$ 绝对收敛, 是指正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. 所以, 我们考察绝对收敛时, 开始就考察正项级数即可. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是给定的正项级数, 并设 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ (k 是自然数) 是标准的正项级数. 如果存在自然数 $n_0 (n_0 \geqslant k)$ 和常数 $A (A > 0)$, 使得

$$\text{当} n > n_0 \text{时}, \quad \text{有} a_n \leqslant A r_n. \tag{5.10}$$

成立那么, 若 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 事实上, 因为正项级数或者收敛, 或者发散于 $+\infty$, 并且当 $\sum_{n=n_0}^{\infty} r_n < +\infty$ 时, 根据 (5.10) 式, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$. 同理, 如果存在自然数 $n_0 (n_0 \geqslant k)$ 和常数 $A (A > 0)$, 使得

$$\text{当} n > n_0 \text{时}, \quad \text{有} a_n \geqslant A r_n \tag{5.11}$$

成立那么, 若 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

作为标准级数, 最一般的是等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, $r > 0$, 此外,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}, \quad s > 0$$

等也屡屡作为标准级数被运用. 要判别这些级数的收敛性, 与广义积分进行比较是简单的做法.

定理 5.2 设 $r(x)$ 是区间 $[k, +\infty)$ (k 为自然数) 上的连续单调递减函数, 且 $r(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = 0$. 并且对于每个自然数 n, $n \geqslant k$, 设 $r_n = r(n)$. 那么, 若广义积分 $\int_k^{+\infty} r(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ 也收敛; 若广义积分 $\int_k^{+\infty} r(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则级数 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ 也发散.

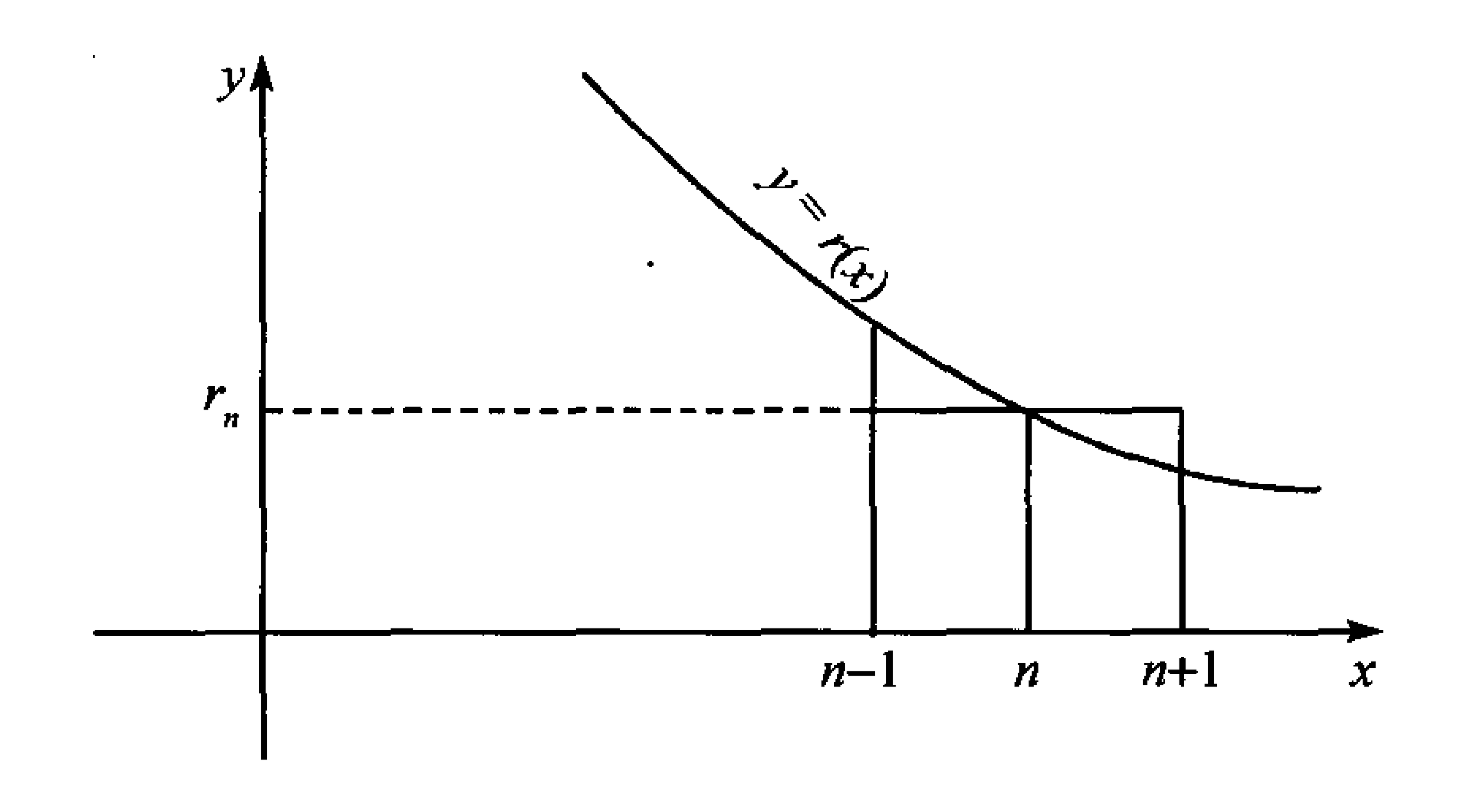
证明 根据假设, 若 $k \leqslant n-1 < x < n$ 时, $r(x) > r_n$; 若 $k \leqslant n < x < n+1$ 时, $r_n > r(x)$. 所以

$$\int_{n-1}^{n} r(x)\mathrm{d}x - r_n > 0, \quad r_n - \int_{n}^{n+1} r(x)\mathrm{d}x > 0,$$

因此

$$\int_k^m r(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=k+1}^{m} r_n = \sum_{n=k+1}^{m} \left(\int_{n-1}^{n} r(x)\mathrm{d}x - r_n \right) > 0, \tag{5.12}$$

$$\sum_{n=k}^{m-1} r_n - \int_k^m r(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=k}^{m-1} \left(r_n - \int_n^{n+1} r(x)\mathrm{d}x \right) > 0. \tag{5.13}$$



所以

$$r_k + \int_k^m r(x)\mathrm{d}x > \sum_{n=k}^m r_n > \int_k^m r(x)\mathrm{d}x,$$

并且, 若 $\int_k^{+\infty} r(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ 也收敛; 若 $\int_k^{+\infty} r(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则级数 $\sum_{n=k}^{\infty} r_n$ 也发散. □

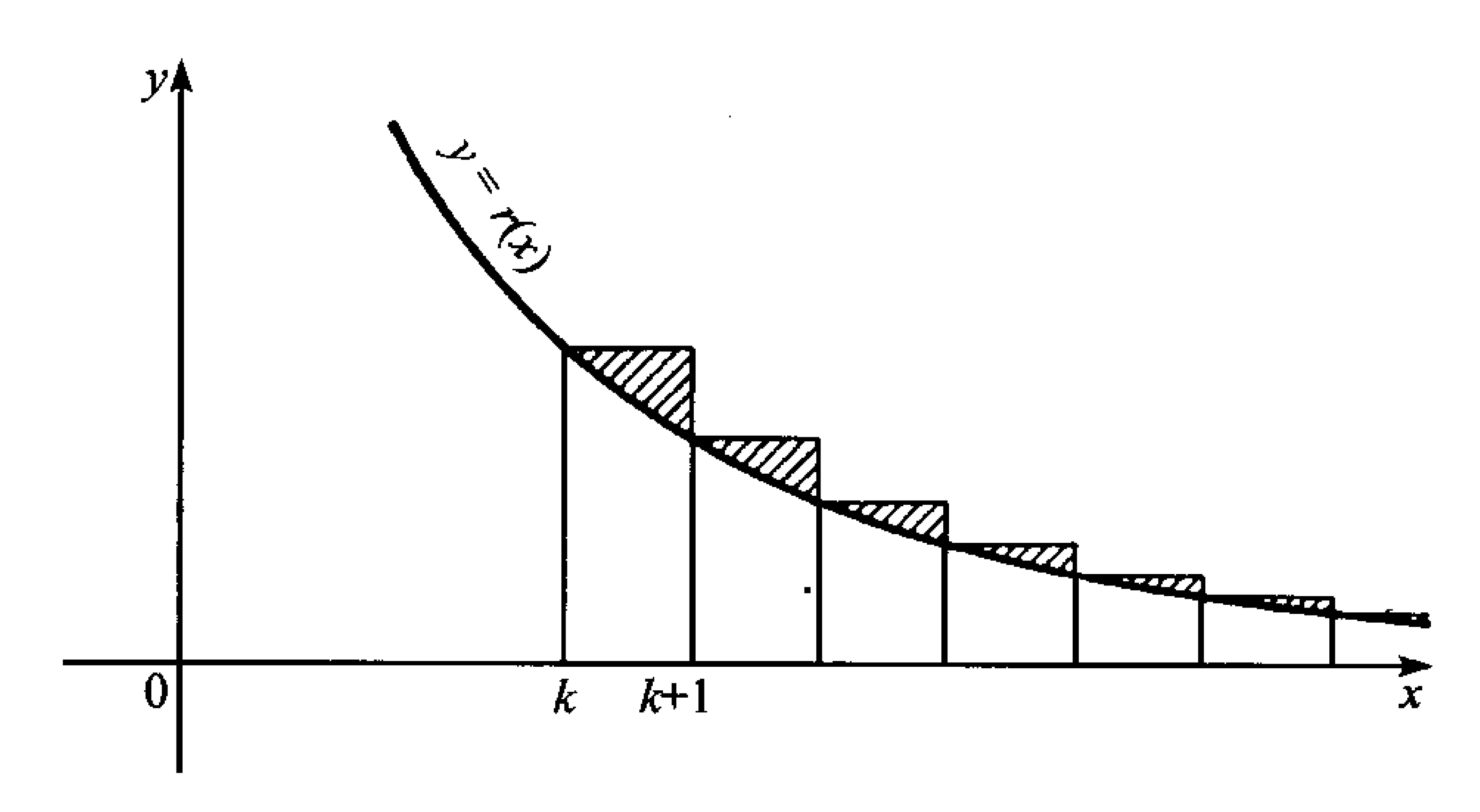
根据 (5.13) 式和 (5.12) 式,

$$\sum_{n=k}^{m-1}\left(r_n - \int_n^{n+1} r(x)\mathrm{d}x\right) < r_k + \sum_{n=k+1}^{m} r_n - \int_k^m r(x)\mathrm{d}x < r_k,$$

所以, 正项级数

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left(r_n - \int_n^{n+1} r(x)\mathrm{d}x\right)$$

收敛. 若设其和为 γ, 则 γ 可以表示为下图的 "阴影部分的面积". 因为



$$\sum_{n=k}^{m} r_n - \int_k^m r(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=k}^{m-1}\left(r_n - \int_n^{n+1} r(x)\mathrm{d}x\right) + r_m,$$

并且 $r_m \to 0\,(m \to \infty)$, 所以,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=k}^{m} r_n - \int_k^m r(x)\mathrm{d}x\right) = \gamma. \tag{5.14}$$

在上面的定理 5.2 中, 若令 $r(x) = x^{-s}$, $s > 0$, $k = 1$, 则当 $s \neq 1$ 时, $\int x^{-s}\mathrm{d}x = x^{1-s}/(1-s)$; 当 $s = 1$ 时, $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \ln x$. 所以, 广义积分 $\int_1^{+\infty} x^{-s}\mathrm{d}x$, 当 $s > 1$ 时

收敛, 当 $s\leqslant 1$ 时发散. 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s>0,$$

当 $s>1$ 时收敛, 当 $s\leqslant 1$ 时发散.

若令 $r(x)=x^{-1}(\ln x)^{-s}$, $s>0$, $k=2$, 则当 $s\neq 1$ 时, $\int x^{-1}(\ln x)^{-s}\mathrm{d}x=(\ln x)^{1-s}/(1-s)$; 当 $s=1$ 时, $\int(x\ln x)^{-1}\mathrm{d}x=\ln\ln x$. 所以, 广义积分 $\int_2^{+\infty}x^{-1}(\ln x)^{-s}\mathrm{d}x$ 当 $s>1$ 时收敛, $s\leqslant 1$ 时发散. 因此级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s},\quad s>0,$$

当 $s>1$ 时收敛, 当 $s\leqslant 1$ 时发散. 同理, 级数

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^s},\quad s>0,$$

当 $s>1$ 时收敛, 当 $s\leqslant 1$ 时发散.

在 (5.14) 中, 设 $r(x)=1/x$, $k=1$, 则极限

$$\mathrm{C}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\tag{5.15}$$

存在. 我们把这个极限 C 叫做**Euler 常数**. C 的值是 0.577 216$\cdots$. 关于其数论的性质, C 是否为有理数, 尚未得到确认.

例 5.1　根据 (3.46) 式,

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

应用 (5.15) 式, 可以变换这个交错级数右边的项, 分别由每 p 个正项和 q 个负项进行交叉排列, 我们可以具体求出这样交叉排列得到的级数的和. 用我们在 3.1 节中阐述过的表示无穷小的记号 o 来代表 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 的数列 $\{\varepsilon_n\}$ 的项 ε_n, 则根据 (5.15) 式,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\mathrm{C}+o.$$

若令

$$P_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1},$$

$$Q_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

则

$$P_n + Q_n = \ln(2n) + \mathrm{C} + o,$$

$$Q_n = \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\mathrm{C} + o,$$

所以

$$P_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\mathrm{C} + o,$$

因此

$$P_{np} - Q_{nq} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q} + o.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(P_{np} - Q_{nq}) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

例如, 若取 $p=2$, $q=1$, 则

$$\begin{aligned}P_{2n} - Q_n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n},\end{aligned}$$

所以

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2.$$

一般地, 变换交错级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ 的项的顺序, 得到的分别由每 p 个正项和 q 个负项交叉排列的级数

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \cdots$$

的和 s 等于级数的前 $np+nq$ 项的部分和 $P_{np} - Q_{nq}$. 所以, 可以给出下列公式

$$s = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

b) 级数收敛的判别法

在正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与标准的正项级数 $\sum\limits_{n=k}^{\infty} r_n$ 进行比较时, 根据 (5.10) 式和 (5.11) 式, 与其对它们进行直接的比较, 倒不如对其相邻的两项比 a_n/a_{n+1} 和 r_n/r_{n+1} 进行比较, 这样应用起来更加方便. 我们将阐述, 在原项中, 相邻两项的比

a_n/a_{n+1} 同 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ 等级数中相对应的相邻两项之比进行比较得到的收敛性的判别法.

定理 5.3 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 如果存在自然数 n_0, 使得

$$\text{当} n \geqslant n_0 \text{ 时,} \quad \text{有 } \frac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant \frac{v_n}{v_{n+1}} \tag{5.16}$$

成立. 那么

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

证明 根据 (5.16) 式,

$$\text{当} n \geqslant n_0 \text{时,} \quad \text{有} \frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}},$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 数列 $\{u_n/v_n\}$ 是单调非增的. 所以

$$\text{当} n \geqslant n_0 \text{时,} \quad \text{有} \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}},$$

若令 $A = u_{n_0}/v_{n_0}$, 则

$$\text{当} n \geqslant n_0 \text{ 时} \quad u_n \leqslant A v_n.$$

所以, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. 因此, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散. □

运用这个定理, 通过对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和等比级数相比较, 可以获得下列

Cauchy 判别法:

(1) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$ 存在, 那么若 $\rho < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $\rho > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

[证明] 当 $\rho < 1$ 时, 对满足 $\rho < r < 1$ 的实数 r, 若取 n_0 充分大, 则

$$\text{只要} n \geqslant n_0, \quad \text{就有} \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{r} = \frac{r^n}{r^{n+1}},$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 同理可得, 当 $\rho > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

一般地, 当 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ 时, 称 α_n 为无穷小. 当 ε_n, α_n 是无穷小时, 无穷小 $\varepsilon_n\alpha_n$, 用记号 $o(\alpha_n)$ 表示. 即我们把 3.1 节中阐述的在函数情况下的无穷小的记号 o 援引到数列的情况中. 进而, α_n 为无穷小时, 形如 $\gamma_n\alpha_n$, $|\gamma_n| \leqslant \mu$(μ 为常数) 的所有无穷小都用符号 $O(\alpha_n)$ 来表示. 用小写的 o 表示无穷小, 即 o 代表收敛于 0 的数列 $\{\varepsilon_n\}$, 而用大写的 O 来表示有界数列 $\{\gamma_n\}$.

在极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$ 等于 1 的情况下, 仅通过与等比级数相比较, 不能判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛还是发散. 此时, 通过级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\ln n)$ 相比较, 可以获得下面的**Gauss 判别法**.

(2) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 设

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right), \quad \delta > 0. \tag{5.17}$$

那么, 若 $\sigma > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $\sigma \leqslant 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

[证明] 当 $\sigma > 1$ 时, 若给定满足 $\sigma > s > 1$ 的实数 s, 则根据 Taylor 公式 (3.40),

$$\frac{(n+1)^s}{n^s} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

所以根据假设 (5.17) 式,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{(n+1)^s}{n^s} = \frac{\sigma - s}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) - O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

并且因为 $\sigma - s > 0$, 若取 n_0 充分大, 那么

$$\text{只要} n \geqslant n_0, \quad \text{就有} \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{(n+1)^s}{n^s} = \frac{n^{-s}}{(n+1)^{-s}},$$

又因为 $s > 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 收敛. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

当 $\sigma < 1$ 时,

$$\frac{n+1}{n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1-\sigma}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right),$$

若取 n_0 充分大,

$$\text{只要}n\geqslant n_0,\quad \text{就有}\frac{n+1}{n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}>0.$$

从而, 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$ 发散, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

当 $\sigma=1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与发散级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}r_n$, $r_n=1/(n\ln n)$ 相比较. 因为 $\mathrm{d}(x\ln x)/\mathrm{d}x=\ln x+1$, 所以根据中值定理,

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=\ln(n+\theta)+1>\ln n+1,\quad 0<\theta<1,$$

因此

$$\frac{r_n}{r_{n+1}}=1+\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{n\ln n}>1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}.$$

所以

$$\frac{r_n}{r_{n+1}}-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{n\ln n}-O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)=\frac{1}{n\ln n}\left(1-O\left(\frac{\ln n}{n^{\delta}}\right)\right),$$

因此, 根据 2.3 节的例 2.9, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n/n^{\delta}=(1/\delta)\lim\limits_{n\to\infty}\ln n^{\delta}/n^{\delta}=0$. 所以若取 n_0 充分大, 则

$$\text{只要}n\geqslant n_0,\quad \text{就有}\frac{r_n}{r_{n+1}}>\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

例 5.2 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)n!}$$

的第 n 项为 a_n, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(n+\gamma)}{(n+\alpha)(n+\beta)}=1+\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

所以根据上述判别法 (2), 这个级数在 $\gamma+1-\alpha-\beta>1$ 时收敛, 在 $\gamma+1-\alpha-\beta\leqslant 1$ 时发散. 这里, γ 是正整数.

c) Abel 级数变换公式

在 4.3 节的例 4.7 中, 我们利用分部积分公式, 证明了广义积分 $\int_0^{+\infty}(\sin x/x)\mathrm{d}x$ 虽然不绝对收敛, 但是收敛. 与级数和的分部积分公式相当的是 Abel 级数变换公式, 并且运用这个公式, 有时也可以证明给出的级数是条件收敛的.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和分别为 $s_m=\sum_{n=1}^{m}a_n$ 和 $t_m=\sum_{n=1}^{m}b_n$, 我们来考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt_n$. 这里, a_n,b_n 也可以为复数. 若 $s_0=0$, 并且 $k\geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m}a_nt_n&=(s_k-s_{k-1})t_k+(s_{k+1}-s_k)t_{k+1}+\cdots+(s_m-s_{m-1})t_m\\&=-s_{k-1}t_k-s_k(t_{k+1}-t_k)-\cdots-s_{m-1}(t_m-t_{m-1})+s_mt_m\\&=s_mt_m-s_{k-1}t_k-s_kb_{k+1}-s_{k+1}b_{k+2}-\cdots-s_{m-1}b_m,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=k}^{m}a_nt_n=[s_mt_m-s_{k-1}t_k]-\sum_{n=k}^{m-1}s_nb_{n+1}. \tag{5.18}$$

这就是**Abel 级数变换公式**. 如果 $|s_n|\leqslant\mu<+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<+\infty$, 那么, $\sum_{n=k}^{\infty}|s_nb_{n+1}|\leqslant\mu\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<+\infty$, 即级数 $\sum_{n=k}^{\infty}s_nb_{n+1}$ 绝对收敛. 所以当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt_n$ 任意给定时, 若 $b_n=t_n-t_{n-1}\,(n\geqslant 2)\,,b_1=t_1$, 则根据公式 (5.18), 直接可以获得下面的级数收敛的判别法.

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 并且级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(t_n-t_{n-1})$ 绝对收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt_n$ 也收敛.

(2) 如果部分和 $s_m=\sum_{n=1}^{m}a_n$ 构成的数列 $\{s_m\}$ 有界, $\{t_n\}\,,t_n>0$ 为单调递减数列, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt_n$ 收敛.

例 5.3 设 θ 是非 2π 整数倍的实数. 若令 $a_n=\mathrm{e}^{in\theta}$, 则因为 $\mathrm{e}^{i\theta}\neq 1$. 所以, $s_m=\mathrm{e}^{i\theta}(\mathrm{e}^{im\theta}-1)/(\mathrm{e}^{i\theta}-1)$, 因此 $|s_m|\leqslant 2/\left|e^{i\theta}-1\right|$. 所以根据上述 (2), 对于任意收敛于 0 的单调递减数列 $\{t_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}t_n\mathrm{e}^{in\theta}$ 收敛. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}t_n\cos(n\theta)$ 和级数

$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin(n\theta)$ 都收敛. 当 $\theta = \pi$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \cos(n\theta)$ 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t_n$. 所以, 这个结果是关于交错级数收敛的 1.5 节定理 1.23 的推广.

5.3　一 致 收 敛

a) 函数序列的极限

如 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 这样把函数排成一列叫做**函数序列**. 函数序列用 $\{f_n(x)\}$ 来表示. 与数列一样, 函数序列也是把其中的每个函数 $f_n(x)$ 叫做它的项. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的各项 $f_n(x)$ 的定义域未必需要全部相同, 但在本节我们首先来考察由定义在某一区间 I 上的函数 $f_n(x)$ 构成的函数序列 $\{f_n(x)\}$. 当函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的所有各项 $f_n(x)$ 都是定义在区间 I 上的函数时, 称 $\{f_n(x)\}$ 为定义在 I 上的函数序列.

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 I 上的函数序列. 当属于 I 的点 ξ 给定时, $\{f_n(\xi)\}$ 成为一个数列. 若此数列 $\{f_n(\xi)\}$ 收敛时, 则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 ξ 处收敛. 当 $\{f_n(x)\}$ 在属于 I 的所有点 ξ 处收敛时, 若令 $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$, 则可确定定义在 I 上的函数 $f(x)$. 我们称此函数 $f(x)$ 为*函数序列* $\{f_n(x)\}$ *的极限*, 记为 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 并且称*函数序列* $\{f_n(x)\}$ *收敛于函数*$f(x)$. 若把属于 I 的实数 ξ 用习惯上采用的变量 x 来表示, 则这个函数序列极限的定义可描述为: 数列 $\{f_n(x)\}$ 在属于 I 的每一点收敛时, 称函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限, 并且称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于函数 $f(x)$.

函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 时, 根据数列极限的定义, 在每一点 $x \in I$, 对于任意的正实数 ξ, 存在自然数 $n_0(\varepsilon, x)$, 使得

$$\text{当} n > n_0(\varepsilon, x) \text{ 时,}\quad \text{有} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立. 一般地, $n_0(\varepsilon, x)$ 不仅与 ε 有关, 而且与 x 也有关. 如果 $n_0(\varepsilon, x)$ 不依赖于点 $x \in I$ 而确定, 就称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

定义 5.1　设 $f(x)$, $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ 是定义在区间 I 上的函数. 如果对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得对于任意的点 $x \in I$,

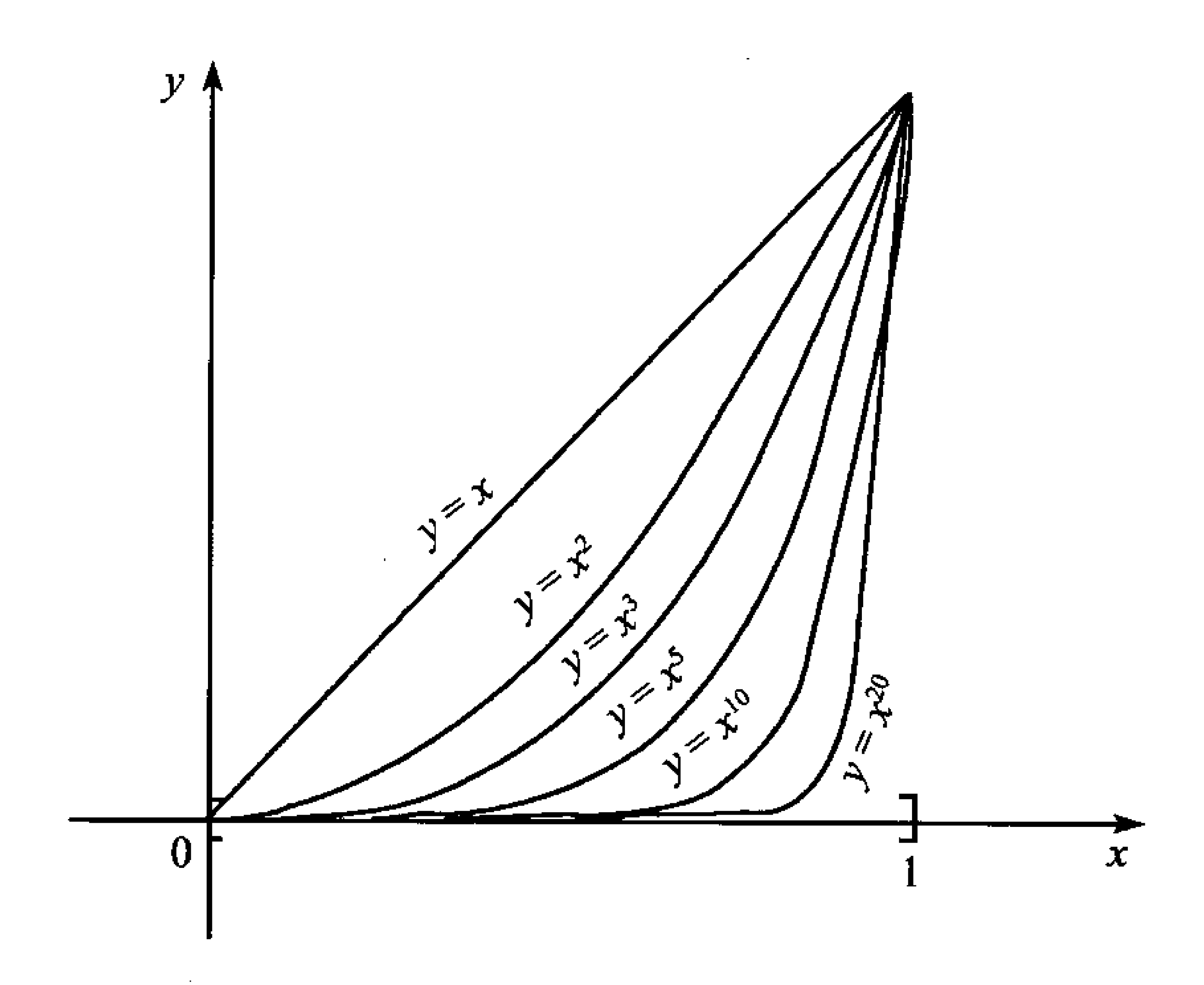
$$\text{当} n > n_0(\varepsilon) \text{ 时,}\quad \text{就有} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{5.19}$$

成立. 那么称函数序列 $\{f_n(x)\}$**一致收敛**(converge uniformly) 于函数 $f(x)$.

一致收敛(uniform convergence) 的含义可通过下面收敛而未必一致收敛的函数序列的例子弄清楚.

例 5.4 在区间 $I=[0,1]$ 上定义 $f_n(x)=x^n$. 则函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 并且极限 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 是 $f(1)=1$, 在 $0\leqslant x<1$ 时使得 $f(x)=0$ 成立的函数. 但此函数序列收敛而不一致收敛.

[证明] 要想证明 (5.19) 式成立, 只须证明 $n>n_0(\varepsilon)$ 时, 若 $0\leqslant x<1$ 时, 则 $x^n<\varepsilon$ 恒成立即可. 但是, 因为 $\lim\limits_{x\to1-0}x^n=1$, 所以只要不是 $\varepsilon\geqslant1$, 这就不可能成立. □



x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^{10}	x^{20}
0.1	0.01	0.001	0			
0.2	0.04	0.008	0.002			
0.3	0.09	0.027	0.008	0.002		
0.4	0.16	0.064	0.026	0.010		
0.5	0.25	0.125	0.063	0.031	0.001	
0.6	0.36	0.216	0.130	0.078	0.006	
0.7	0.49	0.343	0.240	0.168	0.028	0.001
0.75	0.563	0.422	0.316	0.237	0.056	0.003
0.8	0.64	0.512	0.410	0.328	0.107	0.012
0.85	0.723	0.614	0.522	0.444	0.197	0.039
0.9	0.81	0.729	0.656	0.590	0.349	0.122
0.95	0.903	0.857	0.815	0.774	0.599	0.358
0.97	–	–	–	–	0.737	0.544
0.98	–	–	–	–	0.817	0.668
0.99	–	–	–	–	0.904	0.818

定理 5.4 (Cauchy 判别法) 定义在区间 I 上的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛的充分必要条件是, 对于任意的正实数 ε, 存在一自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得在所有的点 $x\in I$ 处,

$$\text{当 } n>n_0(\varepsilon),\quad m>n_0(\varepsilon) \text{ 时},\quad \text{有 } |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \tag{5.20}$$

成立.

证明 根据例子, 若 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛, 则条件成立是显然的. 于是我们反过来假设条件成立. 根据数列的 Cauchy 判别法, 在每一点 $x \in I$ 上, $\{f_n(x)\}$ 收敛, 所以存在极限 $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$. 若取 $m \to \infty$ 时的极限, 则

$$\text{当} n > n_0(\varepsilon) \text{ 时,} \quad \text{有} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

成立. 因此, 在所有的点 $x \in I$ 处,

$$\text{当} n > n_0(\varepsilon/2) \text{时,} \quad \text{有} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立. 所以函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. □

对于以定义在区间 I 上的函数 $f_n(x)$ 为项的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 如果取其部分和为

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x),$$

那么, 若函数序列 $\{s_m(x)\}$ 收敛于函数 $s(x)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛于 $s(x)$, 并且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和为 $s(x)$, 记为

$$s(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x).$$

此时, 若 $\{s_m(x)\}$ 一致收敛于 $s(x)$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$**一致收敛**于 $s(x)$. 进而, 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 一致收敛时, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$**一致绝对收敛**.

绝对收敛的级数必收敛, 这是显然的. 设

$$s_{n,m}(x) = s_m(x) - s_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x),$$

则根据定理 5.4, 定义在 I 上的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛的充分必要条件是, 对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得对所有的点 $x \in I$,

$$\text{只要} m > n > n_0(\varepsilon), \text{ 就有} |s_{n,m}(x)| < \varepsilon \tag{5.21}$$

成立. 设

$$\sigma_{n,m}(x) = |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_m(x)|, \tag{5.22}$$

因为

$$|s_{n,m}(x)| \leqslant \sigma_{n,m}(x),$$

所以, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致绝对收敛, 则它也一致收敛.

例如, 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$, 在 $-1 \leqslant x < 1$ 时收敛; 在 $x < -1$ 或 $x \geqslant 1$ 时发散. 此时, 若在区间 $I=[-1,1)$ 上定义 $f_n(x)=x^n/n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛. 正如在 2.2 节中阐述的, 当区间 I 被函数 $f(x)$ 的定义域包含时, 我们把 $f(x)$ 在 I 上的限制, 即 $f(x)$ 的定义域限制到 I 所得到的函数用 $f_I(x)$ 或者 $(f|I)(x)$ 来表示. 若采用这个符号, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n)|I$ 收敛. 但是, 此时函数 x^n/n 的自然的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 因此, 与其说级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n)|I$ 收敛, 倒不如说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 在 I 上收敛更自然一些.

一般地, 当区间 I 被 $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$ 的定义域包含时, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n|I)(x)$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上也收敛; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n|I)(x)$ 一致收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上也一致收敛. 另外, 若函数序列 $\{(f_n|I)(x)\}$ 收敛, 则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛; 若函数序列 $\{(f_n|I)(x)\}$ 一致收敛, 则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛. 进而, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(f_n|I)(x)|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上绝对收敛; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(f_n|I)(x)|$ 一致收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致绝对收敛.

根据一致收敛的定义易知, 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$ 蕴涵着, 当 $n\to\infty$ 时, $|f_n(x)-f(x)|$ 在 I 上的上确界收敛于 0. 即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

b) 一致收敛与连续性

定理 5.5 设函数 $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$ 在区间 I 上连续.

(1) 如果函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛, 那么其极限 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 在 I 上连续.

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 那么其和 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上连续.

证明　因为 (2) 是 (1) 的推论, 所以证明 (1) 即可. 为此, 只须证明在属于 I 的每一点 a 处, $f(x)$ 是连续的即可. 所以我们考虑给定的点 $a \in I$. 对任意的正实数 ε, 根据假设, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得在所有的点 $x \in I$ 处,

$$\text{只要} n > n_0(\varepsilon), \quad \text{就有} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立. 又因为 $f_n(x)$ 在点 a 连续, 所以存在正实数 $\delta_n(\varepsilon)$,

$$\text{只要} |x - a| < \delta_n(\varepsilon), \quad \text{就有} |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$$

成立. 于是, 确定满足 $n > n_0(\varepsilon)$ 的自然数 n, 并取 $\delta(\varepsilon) = \delta_n(\varepsilon)$. 因为

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) + f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|,$$

所以

$$|f(x) - f(a)| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(a)|.$$

故

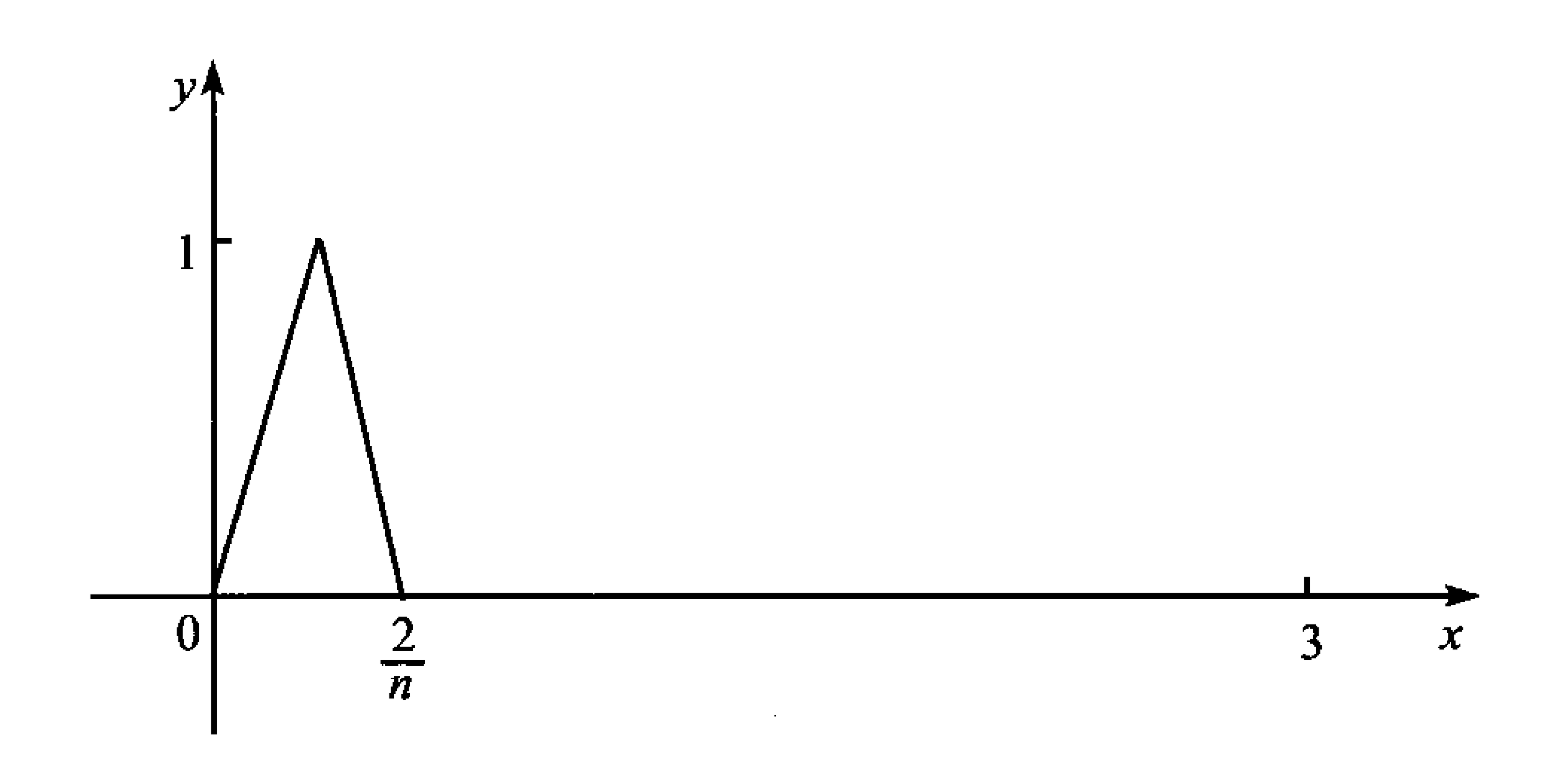
$$\text{只要} |x - a| < \delta(\varepsilon), \quad \text{就有} |f(x) - f(a)| < 3\varepsilon,$$

因为 ε 为任意的正实数, 所以函数 $f(x)$ 在点 a 连续. □

在区间 I 上连续的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛, 但未必一致收敛时, 如上述例 5.4 中证明的, 函数序列的每一项 $f_n(x)$ 的极限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 未必在 I 上连续.

例 5.5　对于每一个自然数 n, 在区间 $[0,3]$ 上连续的函数 $f_n(x)$ 定义如下:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}\text{时}, & f_n(x) = nx, \\ \dfrac{1}{n} < x \leqslant \dfrac{2}{n}\text{时}, & f_n(x) = 2 - nx, \\ \dfrac{2}{n} < x \leqslant 3\text{时}, & f_n(x) = 0. \end{cases}$$



当 $f_n(0)=0$, 并且任意给定 x, $0<x\leqslant 3$ 时, 若 $n>2/x$, 则 $f_n(x)=0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 因此在区间 [0,3] 上函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 并且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ 连续. 但是, $f_n(1/n)=1$, 所以在 [0,3] 上收敛但非一致收敛.

定理 5.6 比较级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 与收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 时, 如果在区间 I 上恒有 $|f_n(x)|\leqslant a_n$, 那么

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致绝对收敛.

(2) 若每项 $f_n(x)$ 在区间 I 上连续, 则其和 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上连续.

证明 设

$$\sigma_{n,m}(x)=|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_m(x)|$$

则在区间 I 上, 恒有

$$\sigma_{n,m}(x)\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m$$

则根据 Cauchy 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致绝对收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛. 所以若每项 $f_n(x)$ 在 I 上连续, 那么, 根据定理 5.5 的 (2), $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上连续. □

例 5.6 在 3.3 节例 3.4 中, 我们约定了函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\sin(\pi n!x)|,$$

在数轴 $\mathbf{R}$ 上的连续性将在第 5 章中证明, 如果我们留意在 $\mathbf{R}$ 上, 恒有

$$0\leqslant\frac{1}{2^n}|\sin(\pi n!x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$$

成立, 则根据上述定理 5.6, 结论显然成立.

例 5.7 如我们在 1.5 节 f) 中阐述的, 全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 是可数的, 并且可以表示为 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,r_3,\cdots,r_m,\cdots\}$. 设

$$f_n(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m(1+n^2(x-r_m)^2)},\tag{5.23}$$

则根据定理 5.6, (5.23) 式右边的级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致绝对收敛, 并且 $f_n(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上关于 x 的连续函数. (5.23) 式右边级数的各项中, 除去满足 $r_m=x$ 的项, 其余各项随着 n 的增加, 呈单调递减. 所以在每点 x 处, $\{f_n(x)\}$ 是单

调递减序列, 并且显然有 $f_n(x) > 0$. 故可确定极限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 函数 $f(x)$ 具有下列性质：在无理点 x 处, $f(x) = 0$; 在有理点 r_m 处, $f(r_m) = 1/2^m$.

证明 根据 (5.23) 式,

$$\left| f_n(x) - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2^m(1+n^2(x-r_m)^2)} \right| \leqslant \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^k}.$$

若 $r_m \neq x$, 则 $\lim_{n\to\infty} 1/(1+n^2(x-r_m)^2) = 0$, 所以如果取这个不等式在 $n \to \infty$ 时的极限, 那么, 当 x 是无理数时,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2^k},$$

当 $x = r_m, m \leqslant k$ 时,

$$\left| f(x) - \frac{1}{2^m} \right| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

成立. 在此, 若取 $k \to \infty$, 则在无理点 x 处, $f(x) = 0$; 在有理点 r_m 处, $f(r_m) = 1/2^m$. □

函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 与 2.2 节例 2.4 的函数一样, 在每个有理点 r_m 处不连续; 在每个无理点处是连续函数. 若

$$g_n(x) = f_n(x - 1/\sqrt{n}),$$

则

$$\left| g_n(x) - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2^m(1+n^2(x-r_m-1/\sqrt{n})^2)} \right| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

在包含 $x = r_m$ 的点 x 处, 因为 $\lim_{n\to\infty} 1/(1+n^2(x-r_m-1/\sqrt{n})^2) = 0$, 所以对于 k, 存在自然数 $n_0(k,x)$, 使得

$$\text{只要} n > n_0(k,x), \quad \text{就有} |g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

成立. 所以 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, 即函数序列 $\{g_n(x)\}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 0. 但是, 收敛的函数序列 $\{g_n(x)\}$ 在任意的区间 $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ 上非一致收敛. 事实上, 若取属于 $(a, a+\varepsilon)$ 的一个有理点 r_m, 则

$$\lim_{n\to\infty} g_n(r_m + 1/\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} f_n(r_m) = f(r_m) = 1/2^m,$$

因此

$$\liminf_{n\to\infty}(\sup_{a<x<a+\varepsilon} g_n(x)) \geqslant 1/2^m > 0.$$

因为 $f_n(x) = g_n(x+1/\sqrt{n})$, 所以函数 $y = f_n(x)$ 的图像 G_{f_n} 是把 $y = g_n(x)$ 的图像 "沿着 x 轴向左平移 $1/\sqrt{n}$" 得到的. 通过每一图像的单纯平移, 由收敛于 0 的函数序列 $\{g_n(x)\}$, 获得收敛于在所有有理点处不连续的函数 $f(x)$ 的函数序列 $\{f_n(x)\}$.

关于单调连续函数序列的收敛, 下列定理成立.

定理 5.7(Dini 定理) 如果以在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f_n(x)$ 作为项的单调非增函数序列, 即满足

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant f_3(x) \geqslant \cdots \geqslant f_n(x) \geqslant \cdots, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 那么函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 设 $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, 则只须证明函数序列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0 即可. 据假设 $g_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 函数序列 $\{g_n(x)\}$ 单调非增, 并且收敛于 0. 若假设它在 $[a,b]$ 上非一致收敛, 则对于某个正实数 ε_0, 无论取什么样的自然数 n, 当 $m > n$ 时, 在 $[a,b]$ 上不等式 $g_m(x) < \varepsilon_0$ 未必成立. 即对于每个自然数 n, 存在满足 $g_m(c_n) \geqslant \varepsilon_0$ 的自然数 $m > n$ 和点 c_n, $a \leqslant c_n \leqslant b$. 则, 因为 $g_n(c_n) \geqslant g_m(c_n)$, 所以

$$g_n(c_n) \geqslant \varepsilon_0. \tag{5.24}$$

根据 1.6 节的定理 1.30, 这个 c_n 构成的点列 $\{c_n\}$ 具有收敛的子列 $c_{n_1}, c_{n_2}, c_{n_3}, \cdots, c_{n_j}, \cdots$, 若设此极限为 $c = \lim_{j\to\infty} c_{n_j}$, 则函数 $g_n(x)$ 关于 x 连续. 所以

$$g_n(c) = \lim_{j\to\infty} g_n(c_{n_j}),$$

若 $n_j > n$, 则根据 (5.24) 式,

$$g_n(c_{n_j}) \geqslant g_{n_j}(c_{n_j}) \geqslant \varepsilon_0,$$

因此

$$g_n(c) \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

这与函数序列收敛于 0 相矛盾. 故函数序列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. □

当然, 对于单调非减的函数序列, 与定理 5.7 相应的结论也同样成立.

例 5.7 中的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 是单调递减序列且收敛, 它提供了一个在任何区间 $[a,b]$, $a<b$, 非一致收敛的连续函数序列的例子. $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上非一致收敛性, 根据定理 5.5 的 (1), 可由函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 在所有的有理点不连续获得.

5.4 无穷级数的微分和积分

a) 一致收敛级数

定理 5.8 设 $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则极限 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{5.25}$$

证明 关于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性, 我们已经在定理 5.5 的 (1) 中证明. 根据假设, 对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,

$$\text{只要}n>n_0(\varepsilon),\quad \text{就有}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

成立. 所以, 根据 4.1 节的定理 4.1,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\int_a^b \varepsilon\mathrm{d}x=\varepsilon(b-a).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ □

例 5.8 设 $f_n(x)$ 是例 5.5 中定义的区间 [0,3] 上的连续函数. 若 $g_n(x)=nf_n(x)$, 在每一个点 x 处 ($0\leqslant x\leqslant 3$) 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0$, 但 $\displaystyle\int_0^3 g_n(x)\mathrm{d}x=n\int_0^3 f_n(x)\mathrm{d}x=1$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^3 g_n(x)\mathrm{d}x=1$ 与 $\displaystyle\int_0^3 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x=0$ 不等. 即 (5.25) 式在无条件下不成立.

定理 5.9 设函数 $f_n(x)$ 在全体区间 I 上连续.

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则对属于 I 的任意两点 c, x 有

$$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{5.26}$$

(2) 若每个函数 $f_n(x)$ 在 I 上连续可微, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上收敛, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 也在 I 上连续可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{5.27}$$

证明 (1) 设 $s_m(x)=\sum_{n=1}^{m}f_n(x), s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. 则根据定理 5.5 的 (2), $s(x)$ 在区间 I 上连续, 并且根据假设, 函数序列 $\{s_m(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $s(x)$, 所以根据定理 5.8,

$$\int_c^x s(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int_c^x s_m(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_c^x f_n(x)\mathrm{d}x,$$

即 (5.26) 式成立.

(2) 设 $t(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$, 则 $t(x)$ 在 I 上连续, 并且根据 (1),

$$\int_c^x t(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x)-f_n(c)),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\int_c^x t(x)\mathrm{d}x+\mathrm{C},\quad \mathrm{C}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(c).$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 I 上连续可微, 并且 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=t(x)$. 即 (5.27) 成立. □

定理 5.9 表明：在一定条件下, 要把级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 进行积分或者微分, 只要把它的各项分别进行积分或者微分即可. 把级数的各项分别进行积分或者微分, 称为**逐项积分**或者**逐项微分**.

b) 一致有界的函数序列

定理 5.8 中, 用 $\{f_n(x)\}$ 的一致有界性替代函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性, 结论也成立.

定理 5.10(Arzelà定理) 设在闭区间 $[a,b]$ 上, 函数 $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$ 连续, 并且一致有界, 即存在不依赖于 n 的常量 M, 使得在 [a,b] 上恒有 $|f_n(x)|\leqslant M$ 成立. 如果函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 并且其极限 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x,\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

这个定理是 Lebesgue 积分论中 Lebesgue 逐项积分定理[①]的特殊情况, 由于在本书中也是便于应用的定理, 在此, 我们介绍由 Hausdorff 给出的初级的证明[②].

① 岩波基礎数学選書,《現代解析入門》续篇《測度と積分》, 参考 §4.4.

② F. Hausdorff “Beweis eines Satzes von Arzelà”, Math. Zeit 26(1927)pp. 135-137 参照藤原松三郎《微分積分学I》pp.365-370.

证明 因为

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x,$$

所以, 如果令 $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, 只须证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

成立即可. 根据关于 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 的假设, 函数 $g_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且恒有 $0 \leqslant g_n(x) \leqslant 2M$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ 成立. 因此, 只须最初就假定 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且恒有 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant M$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 成立, 并且证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{5.28}$$

成立即可.

在每一点 $x(a \leqslant x \leqslant b)$ 处, 数列 $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$, $f_{n+2}(x), \cdots$, $f_m(x), \cdots$ 的上确界设为 $s_n(x)$, 则

$$s_n(x) = \sup_{m\geqslant n} f_m(x).$$

显然,

$$M \geqslant s_1(x) \geqslant s_2(x) \geqslant \cdots \geqslant s_n(x) \geqslant \cdots, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{5.29}$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 0. \tag{5.30}$$

因此, 函数 $s_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时, 根据 Dini 定理 (定理 5.7), 函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0, 从而, 根据定理 5.8,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

由 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant s_n(x)$, 可得 (5.28) 式. 但这种情况下函数序列 $\{f_n(x)\}$ 也在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0, 所以定理 5.10 可以归结为定理 5.8.

一般情况下, $s_n(x)$ 未必连续, 因此积分 $\displaystyle\int_a^b s_n(x)\mathrm{d}x$ 也未必一定有意义. 在此, 我们用如下定义的 s_n 代替 $\displaystyle\int_a^b s_n(x)\mathrm{d}x$: 考虑区间 $[a,b]$ 上有定义的连续函数 $g(x)$

的全体, 使得 $g(x) \leqslant s_n(x)$ 恒成立, 并且把其积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的上确界设为 S_n:

$$S_n = \sup_{g \leqslant s_n} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{5.31}$$

这里, $g \leqslant s_n$ 意味着 $g(x) \leqslant s_n(x)$ 恒成立. 若 $g \leqslant s_n$, 则根据 (5.29) 式, 恒有 $g(x) \leqslant M$, 所以 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$. 若 $g \leqslant s_n$, 则 $g \leqslant s_{n-1}$. 所以, $S_n \leqslant S_{n-1}$. 即

$$M(b-a) \geqslant S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant \cdots \geqslant S_n \geqslant \cdots.$$

因为 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant s_n(x)$, 所以根据 (5.31) 式,

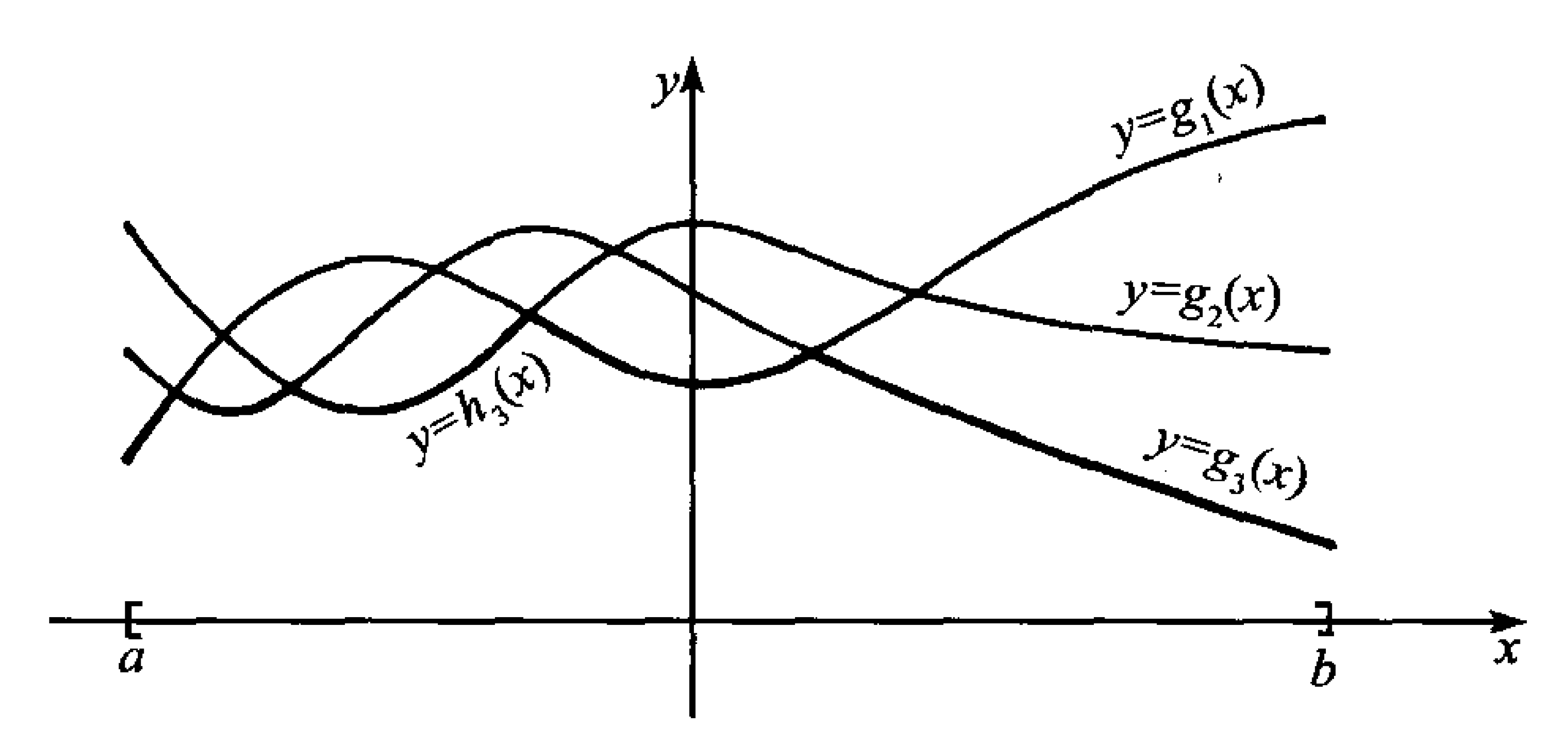
$$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n.$$

因此, 只须证明当 $n \to \infty$ 时, $S_n \to 0$ 即可. 为此, 对任意给定的正实数 ε, 若令 $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$, 则根据 (5.31) 式, 在 $[a,b]$ 上存在连续的函数 $g_n(x)$, 使得

$$\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x > S_n - \varepsilon_n, \quad g_n(x) \leqslant s_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{5.32}$$

成立. 在每一点 x, $a \leqslant x \leqslant b$, 取 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 的最小值为 $h_n(x)$:

$$h_n(x) = \min\{g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)\}.$$



则根据上图, $h_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性是一目了然的, 但要通过计算来证明, 只须进行如下操作即可. 对于实数 $\xi, \eta, \xi+\eta-|\xi-\eta|$ 的值, 当 $\xi \geqslant \eta$ 时, 等于 2η; 当 $\xi \leqslant \eta$ 时, 等于 2ξ. 即

$$\min\{\xi, \eta\} = \frac{1}{2}(\xi + \eta - |\xi - \eta|). \tag{5.33}$$

因此, 一般情况下, 若 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是区间 I 上的关于 x 的连续函数, 则

$$\min\{\varphi(x),\ \psi(x)\} = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|)$$

也是 I 上的关于 x 的连续函数. 所以, $h_1(x)=g_1(x)$, 并且 $n\geqslant 2$ 时

$$h_n(x)=\min\{h_{n-1}(x),g_n(x)\},$$

所以, 根据关于 n 的归纳法, $h_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 显然

$$h_1(x)\geqslant h_2(x)\geqslant\cdots\geqslant h_n(x)\geqslant\cdots, h_n(x)\leqslant g_n(x)\leqslant s_n(x). \tag{5.34}$$

关于这个连续函数 $h_n(x)$, 为了通过关于 n 的归纳法来证明不等式

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x>S_n-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\cdots-\varepsilon_n \qquad (5.35)_n$$

成立, 把 $\mu_n(x)$ 设为 $h_{n-1}(x)$, $g_n(x)$ 中较大的一个 (严格地说, 应该是不小的一个):

$$\mu_n(x)=\max\{h_{n-1}(x),\ g_n(x)\}.$$

与 (5.33) 式相同,

$$\max\{\xi,\eta\}=\frac{1}{2}(\xi+\eta+|\xi-\eta|),$$

所以

$$\mu_n(x)=\frac{1}{2}(h_{n-1}(x)+g_n(x)+|h_{n-1}(x)-g_n(x)|),$$

因此, $\mu_n(x)$ 也在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且

$$\max\{\xi,\eta\}+\min\{\xi,\eta\}=\xi+\eta,$$

所以

$$h_n(x)+\mu_n(x)=h_{n-1}(x)+g_n(x).$$

故

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b h_{n-1}(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b \mu_n(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $h_{n-1}(x)\leqslant s_{n-1}(x)$, $g_n(x)\leqslant s_n(x)\leqslant s_{n-1}(x)$, 所以 $\mu_n(x)\leqslant s_{n-1}(x)$. 因此根据 (5.31) 式, $\int_a^b \mu_n(x)\mathrm{d}x\leqslant s_{n-1}$. 所以, 根据 (5.32) 式,

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x>\int_a^b h_{n-1}(x)\mathrm{d}x+S_n-\varepsilon_n-S_{n-1}.$$

因此, 若假设 $(5.35)_{n-1}$ 式成立, 则 $(5.35)_n$ 式成立. $(5.35)_1$ 式是 $h_1(x)=g_1(x)$, 所以根据 (5.32) 式显然. 从而根据关于 n 的归纳法, 对所有的自然数 n, $(5.35)_n$ 式成立. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n=\varepsilon$, 所以

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x>S_n-\varepsilon. \tag{5.36}$$

$h_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 根据 (5.34) 式函数序列 $\{h_n(x)\}$ 单调非增, 并且 $0 \leqslant h_n(x) \leqslant s_n(x)$. 因此根据 (5.30) 式, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. 因此, 根据 Dini 定理 (定理 5.7), $\{h_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

从而, 根据 (5.36) 式,

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \varepsilon,$$

其中, ε 是任意的实数. 所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0. \qquad \square$$

上述定理 5.10 中, 若把闭区间 $[a,\, b]$ 换成开区间 (a,b), 结论仍然成立.

定理 5.11 设函数 $f_n(x), n = 1,2,3,\cdots$ 在开区间 (a,b) 上连续, 并且一致有界. 则函数序列 $\{h_n(x)\}$ 收敛, 并且如果其极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 在 (a,b) 上连续, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

证明 只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ 即可. 根据假设, 在区间 (a,b) 上恒有 $|f_n(x)| \leqslant M$, M 是与 n 无关的常数. 对于任意给定的正实数 ε , 若取正实数 δ, 使得 $4M\delta < \varepsilon$, $2\delta < b-a$ 成立, 则

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+\delta} f_n(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{b-\delta} f_n(x)\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

并且

$$\left|\int_a^{a+\delta} f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\delta, \qquad \left|\int_{b-\delta}^{b} f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\delta,$$

所以

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} f_n(x)\mathrm{d}x\right| + 2M\delta.$$

$f_n(x)$ 在闭区间 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续, 一致有界, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, 所以根据定理 5.10,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a+\delta}^{b-\delta} f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

因此, 对于 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要} n > n_0(\varepsilon), \quad \text{就有} \left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 因此,

$$\text{只要} n > n_0(\varepsilon), \quad \text{就有} \left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| < 2M\delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

成立. 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

c) 具有强函数的函数序列

设 $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ 是定义在区间 I 上的连续函数. 如果存在在 I 上定义的连续函数 $\sigma(x)$, $\sigma(x) > 0$, 并且对于所有的 n, 使得 $|f_n(x)| \leqslant \sigma(x)$ 恒成立, 那么称 $\sigma(x)$ 是函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的**强函数**(majorant). 当函数序列非一致有界, 但具有强函数时, 可以将定理 5.11 进行如下推广.

定理 5.12 如果函数 $\sigma(x)$, $\sigma(x) > 0$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上连续, $\int_a^{+\infty}\sigma(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 函数 $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ 连续, 并且恒有 $|f_n(x)| \leqslant \sigma(x)$. 那么, 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 并且其极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 连续, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{5.37}$$

证明 对给定点 c, $a < c$, 设

$$\psi(x) = \int_c^x \sigma(x)\mathrm{d}x,$$

并且将 (5.37) 式两边的积分变量 x 换成 $t = \psi(x)$. 因为 $\psi'(x) = \sigma(x) > 0$, 所以根据 3.3 节的定理 3.6, $t = \psi(x)$ 是定义在区间 $(a, +\infty)$ 上的关于 x 的连续可微的单调递增函数, 并且因为假定 $\int_a^{+\infty}\sigma(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 所以存在极限

$$\alpha = \lim_{x\to a+0}\psi(x) = -\int_a^c \sigma(x)\mathrm{d}x, \quad \beta = \lim_{x\to+\infty}\psi(x) = \int_c^{+\infty}\sigma(x)\mathrm{d}x,$$

并且 $\psi(x)$ 的值域是开区间 (α, β). 因此, 若取 $t = \psi(x)$ 的反函数为 $x = \varphi(t) = \psi^{-1}(t)$, 则根据 2.2 节的定理 2.7 和 3.2 节的定理 3.4, $\varphi(t)$ 是区间 (α, β) 上可微的单调递增函数, 并且

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(x)} = \frac{1}{\sigma(x)}, \quad x = \varphi(t),$$

从而, $\varphi'(t) = 1/\sigma(\varphi(t))$ 也是关于 t 的连续函数. 因此, 根据积分变换公式 (4.56),

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f_n(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{f_n(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))}\mathrm{d}t,$$

同理,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{f(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))}\mathrm{d}t.$$

根据假设, 因为 $|f_n(x)| \leqslant \sigma(x)$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 所以

$$\left|\frac{f_n(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))}\right| \leqslant 1, \quad \frac{f(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))}.$$

故, 根据定理 5.11,

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \frac{f_n(\varphi(t))}{\sigma(\varphi(t))}\mathrm{d}t,$$

因此

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$ □

将定理 5.12 中区间 $(a, +\infty)$ 换成任意的区间 I, 结论仍然成立.

下面关于无穷级数的逐项积分的定理是定理 5.12 的推论.

定理 5.13 设函数 $\sigma(x) > 0$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上连续, 并且 $\int_a^{+\infty} \sigma(x)\mathrm{d}x < +\infty$. 如果函数 $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上连续, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛, 其和 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 连续, 并且部分和 $s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$ 恒满足不等式 $|s_m(x)| \leqslant \sigma(x)$, 那么

$$\int_a^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

5.5 幂 级 数

a) 收敛半径

下面我们来考察 x 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性. 如果将 x 用 $x - c$ 置换, 那么考察的结果可以直接应用到 $x - c$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ 上. 在数轴 $\mathbf{R}$ 上的一点

x 处, 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 则当 $n \to \infty$ 时, $a_n x^n \to 0$. 所以, 对于所有的 n, 存在满足 $|a_n x^n| \leqslant M$ 的正的常数 M, 从而

$$|x||a_n|^{1/n} \leqslant M^{1/n}.$$

一般地, 对于所有的 n, 如果 $b_n \leqslant c_n$, 那么 $\limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} c_n$. 又根据 (2.5) 式, 因为 $\lim_{n\to\infty} M^{1/n} = 1$, 所以

$$|x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} M^{1/n} = 1. \tag{5.38}$$

故, 当 $0 < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < +\infty$ 时, 如果设

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

那么

$$|x| \leqslant r. \tag{5.39}$$

当 $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ 时, 令 $r = 0$. 如果 $|x| > 0$, 那么根据 (5.38) 式, $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < +\infty$. 所以, 此时 $|x| = 0$, 即 (5.39) 式成立. $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ 时, 令 $r = +\infty$, 此时 (5.39) 式显然成立. 对于这样定义的 r, 下列定理成立:

定理 5.14　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < r$ 时绝对收敛, 在 $|x| > r$ 时发散.

证明　首先, 当 $|x| < r$ 时, 若选取一个满足 $|x| < \rho < r$ 的实数 ρ, 则 $1/\rho > 1/r = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. 所以根据在 1.5 节 c) 中阐述的上极限的性质 (i), 存在自然数 n_0, 使得

$$\text{只要} n > n_0, \quad \text{就有} |a_n|^{1/n} < \frac{1}{\rho} \text{成立, 从而} |a_n| < \frac{1}{\rho^n}.$$

所以

$$\text{只要} n > n_0, \text{就有} \, |a_n x^n| < \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n \text{成立}.$$

根据假设, 因为 $|x|/\rho < 1$, 所以正项等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (|x|/\rho)^n$ 收敛. 所以根据 1.5 节的定理 1.22, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

其次, 当 $|x|>r$ 时, 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 则根据 (5.39) 式, $|x| \leqslant r$, 矛盾. 所以此时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. □

定理 5.14 中的 r 称为 x 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**(radius of convergence). 若约定 $1/+\infty$ 等于 0, 1/0 等于 $+\infty$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 r, 也包含 $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ 以及 =0 的情况, 并且由**Cauchy–Hadamard 公式**

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \tag{5.40}$$

给出.

当 $0<r<+\infty$ 时, $|x|=r$, 即或者 $x=-r$ 或者 $x=r$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 既可能收敛也可能发散. 因此使级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛的 x 的集合是区间 $(-r,r)$, $[-r,r]$, $[-r,r)$, $(-r,r]$ 之一.

例 5.9 考察幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n$. 根据 2.3 节的例 2.9,

$$\lim_{n\to\infty} \ln n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1. \tag{5.41}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 的收敛半径是 r=1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 在 x=1 处发散; 在 $x=-1$ 处, 根据 1.5 节的定理 1.23, 收敛. 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 收敛的 x 的集合是区间 [−1,1).

关于幂级数的收敛, 如果考虑以复数 c_n 为系数的复数 z 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 那么定理 5.14 也仍然成立.

定理 5.15 设

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}},$$

则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z|<r$ 时绝对收敛, 在 $|z|>r$ 时发散.

证明　仅利用绝对值的性质, 定理 5.14 的证明在此仍然适用. □

定理 5.15 中的 r 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的**收敛半径**. 当然此处 $0 \leqslant r \leqslant +\infty$.

当 $0<r<+\infty$ 时, 复平面 $\mathbf{C}$ 上以 0 为中心、半径 r 的圆周 $C=\{z||z|=r\}$ 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的**收敛圆**(circle of convergence). 根据定理 5.15, 点 z 若在收敛圆 C 的内部, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛; 若在收敛圆的外部, 则发散. 点 z 若在收敛圆 C 上, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 既可能收敛又可能发散. 把 r 称为收敛半径是因为它是收敛圆的半径.

b) 幂级数的微分和积分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 r, $0<r \leqslant +\infty$, 在开区间 $(-r,r)$ 上考察其和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

根据定理 5.14, 当 $|x|<r$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛, 但是它在其收敛区间 $(-r,r)$ 上未必一致收敛. 例如, 当 $|x|<1$ 时,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

此式右边的等比级数收敛, 但是在 $(-1, 1)$ 上非一致收敛. 因为, 若假设此级数一致收敛, 则对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 使得当 $m>m_0(\varepsilon)$ 时, 只要 $-1<x<1$, 就有

$$\left|\frac{1}{1-x}-\sum_{n=0}^{m} x^n\right|<\varepsilon$$

恒成立. 这与 $\lim_{x \to 1-0} 1/(1-x)=+\infty$ 相矛盾. 但是下面的定理成立:

定理 5.16　对于满足 $0<\rho<r$ 的任意实数 ρ, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在闭区间 $[-\rho,\rho]$ 上一致绝对收敛.

证明 对于给定的满足 $\rho<\sigma<r$ 的一个实数 σ, 因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sigma^n$ 收敛, 所以 $|a_n\sigma^n|\leqslant M$, 即存在常数 M, 使得

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{\sigma^n}\tag{5.42}$$

成立. 所以, 当 $-\rho\leqslant x\leqslant\rho$ 时,

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|\rho^n\leqslant M\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n,$$

又因为 $\rho/\sigma<1$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty}M(\rho/\sigma)^n<+\infty$, 故, 根据 5.3 节, 定理 5.6 的 (1), 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $[-\rho,\rho]$ 上一致绝对收敛. □

因为每一项 a_nx^n 在数轴 $\mathbf{R}$ 上是关于 x 的连续函数, 所以根据定理 5.5 的 (2), $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是区间 $[-\rho,\rho]$ 上关于 x 的连续函数, 其中 ρ 是满足 $0<\rho<r$ 的任意实数. 因此, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是开区间 $(-r,r)$ 上的关于 x 的连续函数.

下面, 为了证明 $f(x)$ 在 $(-r,r)$ 上连续可微, 我们来考察, 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 进行逐项微分得到的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 与幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$ 同时收敛, 同时发散. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n a_nx^{n-1}$ 的收敛半径与 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$ 的收敛半径相等. 根据 (5.41) 式, 因为 $\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1$, 所以对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得当 $n>n_0(\varepsilon)$ 时,

$$1<n^{1/n}<1+\varepsilon,$$

因此

$$|a_n|^{1/n}\leqslant|na_n|^{1/n}\leqslant(1+\varepsilon)|a_n|^{1/n}.$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{1/n}\leqslant(1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n},$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\frac{1}{r}.$$

即, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$ 的收敛半径是 r. 从而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径也是 r.

所以, 根据定理 5.16, 对于任意的实数 ρ, $0<\rho<r$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 在区间 $[-\rho,\rho]$ 上一致绝对收敛. 因此根据定理 5.9 的 (2), $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $[-\rho,\rho]$ 上连续可微, 并且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

其中, ρ 是 $0<\rho<r$ 的任意实数. 所以 $f(x)$ 在区间 $(-r,r)$ 上连续可微, 并且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad |x|<r.$$

根据相同的讨论, 可以证明 $f'(x)$ 同样在区间 $(-r,r)$ 上连续可微, 并且

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

同理, $f(x)$ 在区间 $(-r,r)$ 上可任意次连续可微, 其 m 阶导函数由

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)a_nx^{n-m}\tag{5.43}$$

给出.

这里, 若取 x=0, 则 $f^{(m)}(0)=m!a_m$, 即

$$a_m=\frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

因此, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $(-r,r)$ 上, 与以 $f(x)$ 的原点 0 为中心的 Taylor 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

一致.

对于区间 $(-r,r)$ 内的任意点 c, $f(x)$ 可以在 c 的某个邻域, 以 c 为中心展成 Taylor 级数.

[证明] 根据 Taylor 公式 (3.39),

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(c)}{(m-1)!}(x-c)^{m-1}+R_m,$$
$$R_m=\frac{f^m(\xi)}{m!}(x-c)^m,\quad \xi=c+\theta(x-c),\quad 0<\theta<1.$$

在 c 的某个邻域, 当 $m\to\infty$ 时, 为证明 $R_m\to 0$, 我们取满足 $|c|<\sigma<r$ 的一个实数 σ, 则根据 (5.42) 式,

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{\sigma^n},$$

因此, 根据 (5.43) 式, 当 $|x|<\sigma$ 时,

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant M\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\frac{|x|^{n-m}}{\sigma^n}.$$

此式右边的幂级数的和可以如下容易地求出：当 $|x|<\sigma$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sigma^n}=\frac{1}{1-x/\sigma}=\frac{\sigma}{\sigma-x}.$$

把两边关于 x 进行 m 次微分, 则根据 (5.43) 式,

$$\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\frac{x^{n-m}}{\sigma^n}=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{\sigma}{\sigma-x}\right),$$

例如, 通过关于 m 的归纳法, 即可容易得

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{\sigma}{\sigma-x}\right)=\frac{m!\sigma}{(\sigma-x)^{m+1}}.$$

故

$$\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\frac{|x|^{n-m}}{\sigma^n}=\frac{m!\sigma}{(\sigma-|x|)^{m+1}}.$$

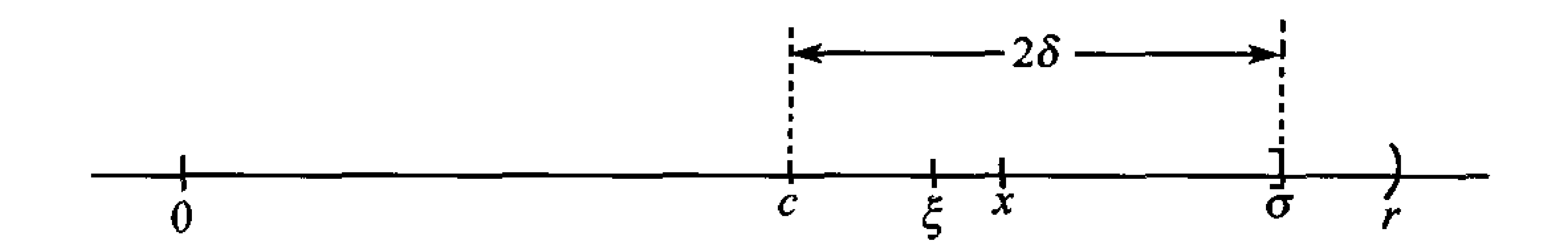
从而

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\frac{Mm!\sigma}{(\sigma-|x|)^{m+1}},\quad |x|<\sigma. \tag{5.44}$$

所以

$$|R_m|\leqslant\frac{M\sigma}{\sigma-|\xi|}\left(\frac{|x-c|}{\sigma-|\xi|}\right)^m,\quad |x|<\sigma.$$

因此, 当 $|x-c|<\sigma-|\xi|$ 时, 只要 $m\to\infty$, 就有 $R_m\to 0$ 成立. 于是, 设 $\sigma-|c|=2\delta$,



则因为 ξ 介于 x 和 c 之间, 所以当 $|x-c|<\delta$ 时,

$$\sigma-|\xi|>\sigma-|c|-\delta=\delta,$$

因此, $|x-c|<\sigma-|\varepsilon|$ 成立. 从而, 当 $m\to\infty$ 时, $R_m\to 0$. 所以 $f(x)$ 在开区间 $(c-\delta,c+\delta)$ 上可以展成以 c 为中心的 Taylor 级数

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots. \quad (5.45) \quad \square$$

因为 c 是区间 $(-r,r)$ 内的任意一点, 所以根据 3.4 节 f) 中的定义, $f(x)$ 是开区间 $(-r,r)$ 上的关于 x 的实解析函数.

若 Taylor 展式 (5.45) 右边的幂级数的收敛半径取为 r_c, 则根据 (5.44) 式

$$\frac{1}{r^c}=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right|^{1/n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{M\sigma}{\sigma-|c|}\right)^{1/n}\frac{1}{\sigma-|c|}=\frac{1}{\sigma-|c|},$$

即

$$r_c\geqslant\sigma-|c|,$$

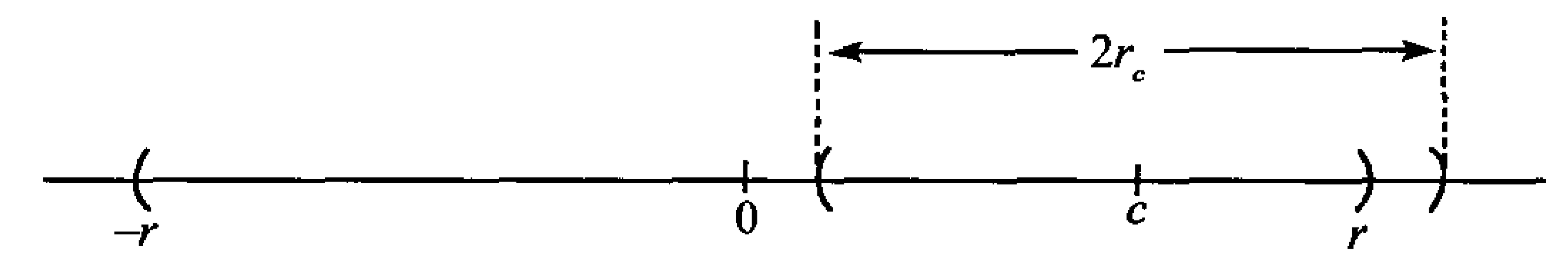
其中, σ 是满足 $|c|<\sigma<r$ 的任意实数. 故

$$r_c\geqslant r-|c|. \quad (5.46)$$

因此, 若设 (5.45) 式右边的幂级数的和是

$$f_c(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots,$$

则 $f_c(x)$ 是在区间 $(c-r_c,c+r_c)$ 上定义的实解析函数. 若 $I=(-r,r)\cap(c-r_c,c+r_c)$, 则 $f(x)$ 和 $f_c(x)$ 都是区间 I 上的关于 x 的实解析函数.



并且根据 (5.45) 式, 在点 $c\in I$ 的邻域 $(c-\delta,c+\delta)$ 上, $f(x)$ 与 $f_c(x)$ 一致. 所以根据 3.4 节的定理 3.20, 在区间 I 上, $f(x)$ 与 $f_c(x)$ 一致. 因为 $r_c\geqslant r-|c|$, 此结果表

明：$f(x)$ 的 Taylor 展式 (5.45) 在 $|x-c|<|r|-|c|$ 时成立. 根据以上的讨论, 可以获得下面的定理：

定理 5.17 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r, 如果 $0<r\leqslant+\infty$, 则其和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在开区间 $(-r,r)$ 上是关于 x 的实解析函数, 并且 $f(x)$ 的 m 阶导函数是

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)a_n x^{n-m}.$$

对于区间 $(-r,r)$ 内的任意点 c, $f(x)$ 在区间 $(c-r+|c|,c+r-|c|)$ 上可以展成 Taylor 级数

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots.$$

例 5.10 如 3.4 节例 3.7 所示, 对于任意的点 $c, c>0$, $\ln x$ 在区间 (0,2c] 上可以展成以 c 为中心的 Taylor 级数：

$$\ln x=\ln c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{nc^n}(x-c)^n. \tag{5.47}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(nc^n)^{1/n}=c$, 所以此右边幂级数的收敛半径是 c. 特别地, 设 $c=1$, 并且把 x 用 $x+1$ 来置换, 则

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,\quad -1<x\leqslant 1. \tag{5.48}$$

此式右边的幂级数的收敛半径当然是 1. 当 $0<c<1$ 时, 若将 (5.47) 式的 x 和 c, 分别用 $1+x$ 和 $1+c$ 来置换, 则

$$\ln(1+x)=\ln(1+c)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}(x-c)^n.$$

此式右边的幂级数的收敛半径是 $r_c=1+c$. $\ln(1+x)$ 的 Taylor 级数 (5.48) 式给出了一个在 (5.46) 式中不等式 $r_c>r-|c|$ 成立的例子.

例 5.11 若 μ 是任意实数时,

$$(1+x)^{\mu}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n,\quad |x|<1. \tag{5.49}$$

若 μ 为正整数时, (5.49) 式归结为二项式定理:

$$(1+x)^{\mu}=1+\sum_{n=1}^{\mu}\binom{\mu}{n}x^{n}.$$

把 (5.49) 式的右边称为**二项级数**. 下面我们利用 Taylor 公式 (3.39) 来证明 (5.49) 式.

[证明] 因为

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1+x)^{\mu}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k},$$

所以

$$(1+x)^{\mu}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-k+1)}{k!}x^{k}+R_n,$$

并且, 根据 Cauchy 余项公式 (3.43) 式,

$$R_n=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{(n-1)!}(1+\theta x)^{\mu-n}(1-\theta)^{n-1}x^{n},\quad 0<\theta<1,$$

即

$$R_n=\mu\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\mu-k}{k}\right)\cdot(1+\theta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}x^{n}.$$

因为当 μ 是正整数或 0 时, 若 $n\geqslant\mu+1$, 则 $R_n=0$. 所以, 我们将排除这种情况. 由已知条件 $|x|<1$, 所以

$$1+\theta x\geqslant 1-|x|\theta\geqslant 1-\theta,$$

因此

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|\leqslant 1.$$

又因为 $0<\theta<1$, 所以 $1-|x|\leqslant 1+\theta x\leqslant 1+|x|$. 因此, 若 $\mu-1>0$, 则 $(1+\theta x)^{\mu-1}\leqslant(1+|x|)^{\mu-1}$; 若 $\mu-1<0$, 则 $(1+\theta x)^{\mu-1}\leqslant(1-|x|)^{\mu-1}$. 若令

$$\alpha(x)=(1+|x|)^{\mu-1}+(1-|x|)^{\mu-1},$$

则必有 $(1+\theta x)^{\mu-1}<\alpha(x)$. 故

$$|R_n|\leqslant|\mu x|\alpha(x)\prod_{k=1}^{n-1}\left|\left(1+\frac{|\mu|}{k}\right)x\right|.$$

因为 $|x|<1$, 对应于 x, 存在满足 $|(1+|\mu|/m)\,x|<1$ 成立的自然数 m. 若令 $\beta=|(1+|\mu|/m)\,x|$, 则

$$|R_n|\leqslant|\mu x|\alpha(x)\prod_{k=1}^{m-1}\left|\left(1+\frac{|\mu|}{k}\right)x\right|\cdot\beta^{n-m},\quad 0\leqslant\beta<1.$$

所以, 当 $n \to \infty$ 时, $R_n \to 0$. 从而 (5.49) 式成立. □

定理 5.18 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r, $0 < r < +\infty$. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 则关于 x 的函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-r, r]$ 上连续. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n$ 收敛, 则函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[-r, r)$ 上连续.

证明 我们考察级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛的情况. 因为函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在开区间 $(-r, r)$ 上连续, 所以只须证明函数 $f(x)$ 在区间 $(0, r]$ 上连续即可. 为此, 根据 5.3 节定理 5.5 的 (2), 只须证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(0, r]$ 上一致收敛即可. 根据假设, 因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 若令

$$s_{m,k} = \sum_{n=k}^{m} a_n r^n,$$

则对于任意正实数 ε, 存在自然数 $m_0(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要} m > k > m_0(\varepsilon), \quad \text{就有} |s_{m,k}| < \varepsilon \text{成立}.$$

对于属于区间 $(0, r]$ 的任意点 x, 若令 $x = rt$, $0 < t \leqslant 1$, 则

$$\sum_{n=k}^{m} a_n x^n = \sum_{n=k}^{m} a_n r^n t^n = s_{k,k} t^k + \sum_{n=k+1}^{m} (s_{n,k} - s_{n-1,k}) t^n,$$

所以根据 5.2 节 c) 中阐述过的 Abel 级数变换公式,

$$\sum_{n=k}^{m} a_n x^n = s_{m,k} t^m + \sum_{n=k}^{m-1} s_{n,k} (t^n - t^{n+1}).$$

因此, $|s_{n,k}| < \varepsilon$, $t^n - t^{n+1} > 0$, $t^m > 0$. 所以

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n x^n \right| < \varepsilon t^m + \sum_{n=k}^{m-1} \varepsilon (t^n - t^{n+1}) = \varepsilon t^k \leqslant \varepsilon.$$

即在属于 $(0, r]$ 上的所有点 x 处,

$$\text{只要 } m > k > m_0(\varepsilon), \quad \text{就有} \left| \sum_{n=k}^{m} a_n x^n \right| < \varepsilon.$$

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(0,r]$ 上一致收敛. □

关于幂级数的积分, 下面结论成立:

定理 5.19 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 r, $0<r\leqslant+\infty$, 那么

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x|<r. \tag{5.50}$$

证明 对于实数 ρ, $0<\rho<r$, 根据定理 5.16, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[-\rho,\rho]$ 上一致绝对收敛. 所以, 根据 5.4 节的定理 5.9, 当 $|x|\leqslant\rho$ 时,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

其中, ρ 可以在 $0<\rho<r$ 中任意选择. 因此 (5.50) 式成立. □

例 5.12 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots, \quad |x|<1,$$

所以

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, -1<x<1.$$

此式右边的幂级数, 在 x=1 时也收敛, 所以, 根据定理 5.18, 它在区间 $(-1,1]$ 上连续. 又因为 $\ln(1+x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上连续, 所以此不等式在区间 $(-1,1]$ 上成立. 于是, 我们得到了 (5.48) 式的另外的一种证明方法.

例 5.13 因为

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x|<1,$$

所以, 根据 4.2 节的 (4.20) 式,

$$\text{Arctan}\, x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad -1<x<1.$$

此式右边的幂级数也在点 $x=1$ 处收敛, 所以, 根据定理 5.18, 它在区间上 $(-1,1]$ 上连续. 所以, 若 x= 1, 则

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

例 5.14 根据 (4.18) 式, 当 $|x|<1$ 时,

$$\operatorname{Arc}\sin x=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

为将它展成 x 的幂级数, 在 (5.49) 式中, 令 $\mu=-1/2$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!2^n}x^n,\quad |x|<1.$$

将 x 用 $-x^2$ 置换, 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!2^n}x^{2n},\quad |x|<1.$$

所以, 当 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arc}\sin x&=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!2^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\&=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots.\end{aligned}$$

把这个幂级数记为

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1},\quad a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n\cdot(2n+1)},$$

则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}=1+\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以, 根据在 5.2 节 b) 中的 Gauss 判别法, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 故幂级数 $x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ 在 $|x|=1$ 处也收敛. 从而, 根据定理 5.18, 其和在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上是关于 x 的连续函数. 所以, 上述的 Arcsin x 的幂级数展式在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时成立. 特别地, $x=1$ 时,

$$\frac{\pi}{2}=\operatorname{Arc}\sin 1=1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots.$$

c) 指数函数

设 $D\subset\mathbf{C}$ 是复平面上的点的集合. 对于属于 D 的每一点 z, 都对应一个复数 w, z 到 w 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数, 并且把通过 f 与 z 相对应的 w

用 $f(z)$ 表示. 如在 2.1 节中阐述的 $D\subset\mathbf{R}$ 的情况一样, 我们把 z 看作是代表属于 D 的点的变量. 把函数 f 记为 $f(z)$, 并且称 $f(z)$ 是复变量 z 的函数. 又称 D 为函数 $f(z)$ 的定义域, 称 $f(D)=\{f(z)\,|z\in D\}$ 为函数 $f(z)$ 的值域.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 是以复数 c_n 为系数的 z 的幂级数, 如果此级数的收敛半径 r 满足 $0<r\leqslant+\infty$, 那么根据定理 5.15, 当 $|z|<r$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 绝对收敛. 所以若令

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,$$

则函数 $f(z)$ 是定义在 $D=\{z\in\mathbf{C}||z|<r\}$ 上的关于复变量 z 的函数. 当 $r=+\infty$ 时, $D=\mathbf{C}$; 当 $r<+\infty$ 时, D 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛圆的内部.

在 2.3 节 (2.11) 中, 把 "e 的 z 次幂" 定义为

$$\mathrm{e}^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

则如我们在 1.6 节 f) 中所证, 此式右边的幂级数在复平面的所有点 z 处绝对收敛, 所以其收敛半径为 $+\infty$. 把定义在 $\mathbf{C}$ 上的关于复变量 z 的函数 $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n/n!$ 称为指数函数. 实变量的指数函数 e^x 是把 e^x 的定义域限制到 $\mathbf{R}$ 上的函数.

对于任意的复数 z 和 w, 不等式

$$\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w=\mathrm{e}^{z+w}\tag{5.51}$$

成立.

[证明] 因为 $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n/n!$, $\mathrm{e}^w=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w^n/n!$, 所以根据 5.1 节中证明的分配律 (5.9) 式,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{z^{n-1}w}{(n-1)!1!}+\cdots+\frac{z^{n-k}w^k}{(n-k)!k!}+\cdots+\frac{w^n}{n!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}w+\cdots+\binom{n}{k}z^{n-k}w^k+\cdots+w^n\right).\end{aligned}$$

所以, 根据二项式定理,

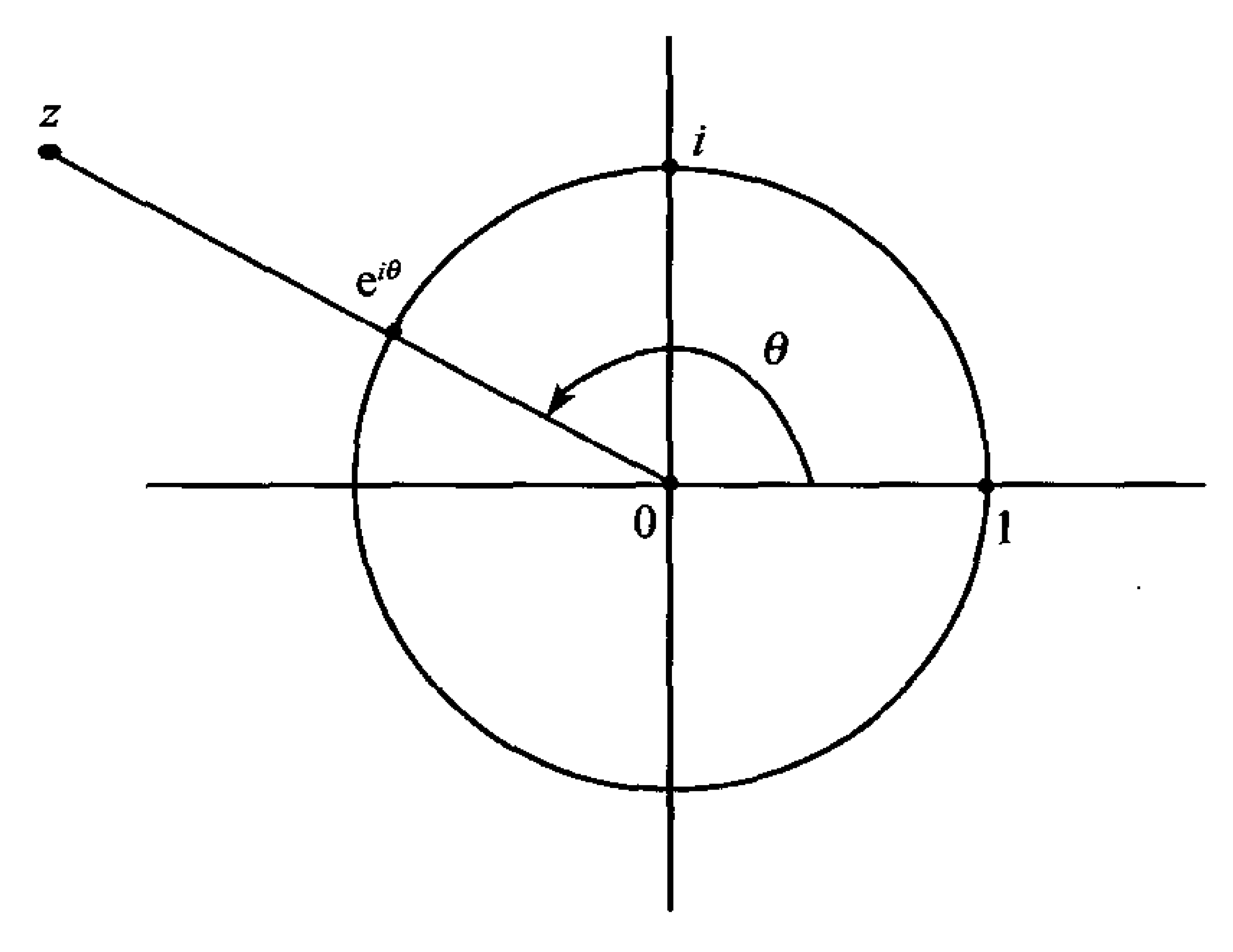
$$\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n=\mathrm{e}^{z+w}.$$ □

关于 $e(\theta) = e^{i\theta}$ 的等式 (2.15): $e(\theta)\,e(\varphi) = e(\theta+\varphi)$ 是等式 (5.51) 的特殊情况.

任意的复数 z 可以表示为

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta\text{是实数}. \tag{5.52}$$

[证明] 当 $z = 0$ 时 (5.52) 式显然成立. 所以, 令 $z \neq 0$, 并且设 $r = |z|$. 因为 $|z/r| = 1$, 所以根据 2.4 节, 存在实数 θ 使得 $z/r = e(\theta) = e^{i\theta}$ 成立.



从而, $z = re^{i\theta}$. □

我们把 θ 称为 $z = re^{i\theta}$, $z \neq 0$ 的**辐角**(argument, amplitude). 若设 $z = x + iy$, x 和 y 是实数, 则根据 (5.51) 式,

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

所以 $|e^z| = e^x > 0$, 因此 $e^z \neq 0$. 反之, 任意的复数 w, $w \neq 0$ 可以表示为 $w = e^z$. 因为, 根据 (5.52) 式, $w = |w|\,e^{i\theta}$, θ 是实数, 所以, 若 $z = \ln|w| + i\theta$, 则

$$e^z = e^{\ln|w|}e^{i\theta} = |w|e^{i\theta} = w.$$

即, 指数函数 e^z 的值域是从复平面 $\mathbf{C}$ 中除去原点 0 所得到的集合: $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$.

5.6 无穷乘积

对给定的数列 $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, 称形式

$$a_1a_2a_3a_4\cdots a_n\cdots$$

为**无穷乘积**(infinite product), 用 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 来表示. 并且称

$$p_m = a_1a_2a_3\cdots a_m = \prod_{n=1}^{m} a_n$$

为其**部分积** (partial product)．当部分积 p_m 构成的数列 $\{p_m\}$ 收敛, 并且其极限 $p=\lim_{m\to\infty} p_m$ 非 0 时, 称无穷乘积**收敛**于 p. 记为

$$p=\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots.$$

排除 p=0 的情况, 是因为 0 是关于乘法运算没有逆元的奇异的数. 当数列 $\{p_n\}$ 不收敛或者是收敛于 0 时, 称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**. 若 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 p, 则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} p_n}{\lim_{n\to\infty} p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1,$$

所以, 从头来考察一下

$$a_n = 1+u_n, \quad u_n > -1, \quad u_n \to 0 (n\to\infty)$$

时的无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$. 目标是通过 u_n 的简单的表达式, 求出 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛的充分条件.

为此, 令

$$l_n = \ln(1+u_n),$$

并且把无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 转换为无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$. 因为

$$\ln p_m = \ln \prod_{n=1}^{m}(1+u_n) = \sum_{n=1}^{m} l_n,$$

所以, 若 $\lim_{m\to\infty} p_m = p \neq 0$ 存在, 则根据 $\ln x$ 的连续性,

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \lim_{m\to\infty} \ln p_m = \ln p.$$

反之, 因为

$$p_m = \mathrm{e}^{s_m}, \quad s_m = \sum_{n=1}^{m} l_n,$$

所以, 若 $s=\lim_{m\to\infty} s_m$ 存在, 则

$$\lim_{m\to\infty} p_m = \mathrm{e}^{s} \neq 0.$$

即,无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛的充分必要条件是无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ 收敛. 若收敛, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=\mathrm{e}^s,\quad s=\sum_{n=1}^{\infty}l_n. \tag{5.53}$$

若 $p=\lim_{m\to\infty}p_m=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=-\infty$. 所以, 如果不排除 $p=0$ 的情况, 那么无穷乘积收敛的结果不成立.

定理 5.20 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 那么无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛.

证明 因为 $u_n\to 0(n\to\infty)$, 所以存在自然数 n_0, 使得

$$\text{只要}n>n_0,\quad \text{就有}\,|u_n|<\frac{1}{2}\,\text{成立}.$$

因为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}u)\ln(1+u)=1/(1+u)$, 所以根据中值定理 (定理 3.5),

$$l_n=\ln(1+u_n)=\frac{u_n}{1+\theta_n u_n},\quad 0<\theta_n<1.$$

若 $|u_n|<1/2$, 则 $1+\theta_n u_n\geqslant 1-|u_n|>1/2$, 因此

$$\text{只要}n>n_0,\quad \text{就有}\,|l_n|<2\,|u_n|\,\text{成立}.$$

所以, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ 也绝对收敛. 从而, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛. □

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛时, 称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 绝对收敛. 此时, 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ 也绝对收敛, 所以根据 5.1 节定理 5.1 的 (1), 即使改变项 l_n 的顺序, 其和 $s=\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ 也不改变. 故根据 (5.53) 式, 即使改变项 $1+u_n$ 的顺序, 无穷乘积 $p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 也不改变.

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛而非绝对收敛时, 称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 条件收敛. 根据中值定理,

$$u_n=\mathrm{e}^{l_n}-1=\mathrm{e}^{\theta l_n}l_n,\quad 0<\theta<1.$$

所以, 当 $|l_n|<1$ 时,

$$|u_n|=|\mathrm{e}^{\theta l_n}||l_n|\leqslant \mathrm{e}\cdot|l_n|.$$

因此, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也绝对收敛. 故, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 条件收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 也条件收敛. 因此, 根据定理 5.1 的 (2), 对于任意给定的实数 ξ, 能够变换级数 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 项的顺序满足 $\sum_{n=1}^{\infty} l_{\gamma(n)}=\xi$. 所以, 根据 (5.53) 式, 对于任意的正实数 $\eta=\mathrm{e}^{\xi}$, 能够改变无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 的项的顺序, 使得

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_{\gamma(n)})=\eta$$

成立. 只有在绝对收敛情况下, 无穷乘积 $p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 即使改变其项的顺序也不会改变.

例 5.15 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 是 5.2 节 a) 中阐述的收敛的标准正项级数之一. 所以, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-1/4n^2)$ 绝对收敛, 并且其值

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}. \tag{5.54}$$

称 (5.54) 式为**Wallis 公式**.

[证明] 关于 $S_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\mathrm{d}x$, 根据在 4.2 节例 4.4 的结果,

$$S_{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n},$$

$$S_{2n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

进而, 根据 (4.27) 式, 当 $n\to\infty$ 时, $S_{2n}/S_{2n+1}\to 1$. 因为

$$\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right),$$

所以

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}=\frac{2}{\pi}.$$ □

例 5.16 在 (4.50) 式中定义的 Γ 函数 Γ(s) 可以表示为

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)!m^s}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m-1)}, \quad s>0. \tag{5.55}$$

[证明] 因为

$$\frac{(m-1)!m^s}{(s+1)(s+2)\cdots(s+m-1)} = \prod_{n=1}^{m-1} \frac{n(n+1)^s}{(s+n)n^s},$$

所以, 若令

$$\frac{n(n+1)^s}{(s+n)n^s} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \Big/ \left(1+\frac{s}{n}\right) = 1+u_n.$$

则 (5.55) 式的右边可以写成

$$\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

根据 Taylor 公式,

$$(1+x)^s = 1+sx+\frac{1}{2}s(s-1)(1+\theta x)^{s-2}x^2, \quad 0<\theta<1,$$

所以

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1 - \frac{s}{n} = \frac{1}{2}s(s-1)\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{s-2}\frac{1}{n^2}, \quad 0<\theta<1,$$

并且显然有 $(1+\theta/n)^{s-2} < 2^s$. 因此

$$u_n < 2^{s-1}s(s-1)\frac{1}{n^2},$$

从而, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 故根据定理 5.20, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛. 即 (5.55) 式右边的极限存在.

为证明此极限等于 Γ(s), 我们考察广义积分

$$\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^m \mathrm{d}t.$$

因为 $s>0$, 所以, 根据 4.3 节的定理 4.11, 这个广义积分显然收敛. 根据分部积分公式 (4.22) 式,

$$\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^m \mathrm{d}t = \left[\frac{t^s}{s}(1-t)^m\right]_0^1 + \frac{m}{s}\int_0^1 t^s(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t,$$

并且 $[(t^s/s)(1-t)^m]_0^1 = 0$. 所以,

$$\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^m \mathrm{d}t = \frac{m}{s}\int_0^1 t^s(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t = \cdots$$
$$= \frac{m}{s}\cdot\frac{m-1}{s+1}\cdot\frac{m-2}{s+2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{s+m-1}\int_0^1 t^{s+m-1}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m)}.$$

因此, 若令 $t = x/m$, 并且把积分变量 t 变换为 x, 则

$$\int_0^m x^{s-1}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \mathrm{d}x = \frac{m!m^s}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}.$$

所以, 要证明 (5.55) 式, 只须证明

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^m x^{s-1}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(s)$$

成立即可. 为此, 令

$$\begin{cases} 0 < x \leqslant m\text{时} & f_m(x) = x^{s-1}\left(1-\dfrac{x}{m}\right)^m, \\ x > m\text{时}, & f_m(x) = 0, \end{cases}$$

并且利用 5.4 节 c) 中阐述的具有强函数的函数序列的定理 5.12. 函数 $f_m(x)$ 是在定义区间上的 x 的连续函数, 并且根据 (2.7) 式, $\lim\limits_{m\to\infty}(1-x/m)^m = \mathrm{e}^{-x}$, 所以

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = x^{s-1}\mathrm{e}^{-x},$$

又

$$0 \leqslant f_m(x) \leqslant x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

事实上, 因为

$$1-\frac{x}{m} \leqslant 1-\frac{x}{m}+\frac{x^2}{4m^2} = \left(1-\frac{x}{2m}\right)^2,$$

所以, 当 $0 < x \leqslant m$ 时,

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \leqslant \left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m} \leqslant \left(1-\frac{x}{4m}\right)^{4m} \leqslant \cdots,$$

从而

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^m \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{x}{2^k m}\right)^{2^k m} = \mathrm{e}^{-x}.$$

总之, $x^{s-1}e^{-x}$ 是函数序列 $\{f_m(x)\}$ 的强函数, 并且根据 (4.50) 式,

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \Gamma(s) < +\infty.$$

故根据定理 5.12,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^m x^{s-1}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^{+\infty} f_m(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \Gamma(s)$$

成立. □

关于未必绝对收敛的无穷乘积, 有下列收敛的判别法.

定理 5.21 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 同时收敛, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛.

证明 首先证明, 若 $|u_n| < 1/4$, 则

$$u_n - u_n^2 \leqslant l_n = \ln(1+u_n) \leqslant u_n. \tag{5.56}$$

令 $u = u_n$, 则根据 Taylor 公式 (3.39),

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2(1+\theta u)^2}u^2, \quad 0<\theta<1,$$

所以, $\ln(1+u) \leqslant u$ 显然成立. 因为 $|u| < 1/4$, 所以 $1+\theta u \geqslant 1-|u| > 3/4$. 因此,

$$\ln(1+u) - u + u^2 = \left(1-\frac{1}{2(1+\theta u)^2}\right)u^2 \geqslant u^2/9 \geqslant 0.$$

即不等式 (5.56) 式成立. 所以取满足如下条件的 k_0: 当 $n > k_0$ 时, $|u_n| < 1/4$ 成立; 当 $m > k > k_0$ 时,

$$\sum_{n=k}^{m} u_n - \sum_{n=k}^{m} u_n^2 \leqslant \sum_{n=k}^{m} l_n \leqslant \sum_{n=k}^{m} u_n. \tag{5.57}$$

一般地, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是, 根据 Cauchy 判别法, 对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得当 $m > k > n_0(\varepsilon)$ 时, 就有 $\left|\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$ 成立. 因此, 根据 (5.57) 式, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 同时收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$ 也收敛. 从而无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 收敛. □

根据此定理知, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n/n\right)$ 是条件收敛的.

习　　题

38. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 设 $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 并且证明分配律 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 成立 (藤原松三郎《微分積分学I》, p.72).

39. 证明级数 $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \cdots$ 当 $p > 2$ 时收敛; 当 $p \leqslant 2$ 时发散 (藤原松三郎《微分積分学I》, p.137 习题 51)(利用 Gauss 判别法).

40. 证明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $\liminf\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ 时收敛; 当 $\limsup\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ 时发散 (利用 Raabe 判别法).

41. 证明当 $b - 1 > a > 0$ 时级数 $1 + \frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \cdots$ 收敛.

42. 举例说明, 存在满足 $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 并且在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于 0 的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$.

43. 求出幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ 的收敛半径.

44. 设 $f_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ 是在区间 I 上关于 x 的连续函数, 并且 $f_n(x) > -1$. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致绝对收敛, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$ 是 I 上关于 x 的连续函数.